

Analysis 1

Skriptum Wintersemester 2025/26

Dieses Skriptum folgt meiner Vorlesung im Wintersemester 2025/26, wobei gelegentlich kleinere Korrekturen und Ergänzungen vorgenommen wurden. Die Beweise und Rechnungen im Skriptum sind typischerweise etwas knapper gehalten als in der Vorlesung. Es fehlen darüber hinaus die Schaubilder und viele der mündlichen Erläuterungen aus der Vorlesung.

Ich bedanke mich herzlich bei Esther Bleich und Lars Machinek für ihre Unterstützung bei der Erstellung von früheren Varianten dieses Skriptums.

Karlsruhe, 8. Oktober 2025

Roland Schnaubelt

Inhaltsverzeichnis

0.1. Bezeichnungen	1
0.2. Vollständige Induktion	2
Kapitel 1. Reelle und komplexe Zahlen	7
1.1. Geordnete Körper	7
1.2. Suprema und reelle Zahlen	13
1.3. Potenzen mit rationalen Exponenten	19
1.4. Komplexe Zahlen	23
Literaturverzeichnis	25

0.1. Bezeichnungen

Die ersten beiden Abschnitten haben einführenden Charakter. Wir gehen dabei von einem naiven Verständnis der Logik und der Mengenlehre aus. Weiter verwenden wir die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ bzw. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ und die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \text{ Bruch gekürzt} \right\}$$

aus der Schulmathematik samt ihrer Rechenregeln. (Die Mengenschreibweise wird gleich erläutert.)

Zur Abkürzung benützen wir in manchen Formeln die Symbole $\neg$ (“nicht”), $\vee$ (“oder”), $\wedge$ (“und”), $\implies$ (“impliziert”), $\iff$ (“äquivalent”), $\exists$ (“es existiert”), $:=$ (“gleich per Definition”), $\exists!$ (“es existiert genau ein”) und $\forall$ (“für alle”) aus der Logik. Beweise werden mit dem Zeichen $\square$ beendet. Mit $\diamond$ beschließen wir Bemerkungen und Beispiele, auf die kein Beweis folgt.

Eine *Aussage* A ist ein feststellender Satz, der entweder wahr oder falsch ist. So sind etwa $7 + 5 = 12$ und $n + n = 3n$ (für n aus $\mathbb{Z}$) Aussagen, wobei die erste wahr und die zweite für $n \neq 0$ falsch ist. Hingegen ist $5 + n$ keine Aussage. In den nächsten wahren Aussagen treten einige der obigen logischen Verknüpfungen auf.

$$n + 5 = 12 \iff n = 7. \quad n = 3 \Rightarrow n < 5.$$

$$(n > 3) \wedge (n < 5) \wedge (n \text{ ist natürliche Zahl}) \iff n = 4.$$

Man beachte, dass $n < 5 \Rightarrow n = 3$ für natürliche Zahlen n falsch ist. Für Aussagen A und B bedeutet “entweder A oder B ” gerade $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.

Mengen werden durch die Angabe der in ihnen enthaltenen *Elemente* definiert. Zur Erläuterung geben wir einige Beispiele an.

$$D = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{1, 1, 2, 3\} \text{ hat die Elemente } 1, 2 \text{ und } 3.$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \text{ ist die Menge aller natürlichen Zahlen.}$$

$$G = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\}.$$

$$\emptyset = \{ \} \text{ ist die leere Menge, die kein Element enthält.}$$

Für Mengen M und N verwenden wir die folgenden Begriffe und Operationen.

$x \in M$ bedeutet, dass x ein Element von M ist, also in M liegt; z.B. $2 \in D$ oder $\forall n \in \mathbb{N} : 4n \in G$.

$x \notin M$ bedeutet, dass x kein Element von M ist; z.B. $3 \notin G$ oder $0 \notin \emptyset$.

$M \subseteq N$ bedeutet, dass alle $x \in M$ auch in N enthalten sind oder gleichwertig: $x \in M \Rightarrow x \in N$. Dann heißt M *Teilmenge* von N , sowie N *Obermenge* von M . Beispiele sind $\{2, 6, 8\} \subseteq G$ oder $G \subseteq \mathbb{N}$.

$M = N$ bedeutet, dass $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ gelten. Die Mengen M und N heißen dann *gleich* und haben die gleichen Elemente, wie z.B. $G = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ oder $D = \{3 - 2, 1 + 1, 6/2\}$.

$M \neq N$ bedeutet, dass M und N nicht gleich sind, wie etwa $D \neq G$.

- $M \subset N$ oder $M \subsetneq N$ bedeutet, dass $M \subseteq N$ und $M \neq N$ gelten. Dann heißt M *echte Teilmenge* von N , z.B. $G \subset \mathbb{N}$.
- $M \cap N$ ist die Menge aller x , die in M und in N enthalten sind, und heißt *Schnittmenge* oder *Durchschnitt*. Beispiele sind $D \cap G = \{2\}$, $D \cap \mathbb{N} = D$, $M \cap \emptyset = \emptyset$.
- $M \cup N$ ist die Menge aller x , die in M oder in N enthalten sind, und heißt *Vereinigungsmenge*. Beispiele sind $D \cup G = \{1, 2, 3, 4, 6, \dots\}$, $D \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$ oder $M \cup \emptyset = M$.
- $M \setminus N$ ist die Menge aller x , die in M aber nicht in N enthalten sind, und heißt *Differenzmenge*. Beispiele sind $G \setminus D = \{4, 6, \dots\}$, $D \setminus G = \{1, 3\}$, $G \setminus \mathbb{N} = \emptyset$ oder $\mathbb{N} \setminus G = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ungerade}\}$.
- $M \times N$ ist die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$ und heißt *Produktmenge*. Weiter schreiben wir M^2 statt $M \times M$. Entsprechend definiert man n -fache Produktmengen.

In Formelsprache gelten

$$\begin{aligned} M \cap N &= \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}, & M \cup N &= \{x \mid x \in M \vee x \in N\}, \\ M \setminus N &= \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}, & M \times N &= \{(x, y) \mid x \in M \wedge y \in N\}. \end{aligned}$$

Man ersetzt hierbei oft das und-Zeichen $\wedge$ durch ein Komma. Einige Rechenregeln der Logik und Mengenlehre werden in der Linearen Algebra oder in [1] diskutiert. Soweit nötig gehen wir später auf einzelne Regeln ein.

Eine *Abbildung* oder *Funktion*

$$f : M \rightarrow N; \quad x \mapsto f(x),$$

besteht aus einem Definitionsbereich M , einer Bildmenge N und einer Abbildungsvorschrift, die jedem Urbild $x \in M$ genau ein Bild $f(x) \in N$ zuordnet. Ein Beispiel ist $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; x \mapsto 2x$, auch geschrieben als $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; f(x) = 2x$. Ein anderes ist

$$f : \{\star, \triangle, \square\} \rightarrow \{0, 1\}; \quad f(\star) = 1, \quad f(\triangle) = 0, \quad f(\square) = 0.$$

Oft verwendet man abkürzend nur das Symbol f für die Funktion. Diese Begriffe werden später vertieft und ergänzt, und auch in der Linearen Algebra behandelt.

0.2. Vollständige Induktion

Wir diskutieren in diesem Abschnitt ein wesentliches Beweisprinzip der Mathematik. Dieses beruht auf der folgenden Eigenschaft der natürlichen Zahlen.

Prinzip der vollständigen Induktion.

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ erfülle die beiden folgenden Bedingungen.

(IA) 1 sei ein Element von M .

(IS) Es gehöre ein Zahl $n \in \mathbb{N}$ zu M . Dann liegt auch ihr Nachfolger $n+1$ in M . Dann gilt $M = \mathbb{N}$.

BEWEIS. Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir müssen zeigen, dass k in M liegt. Gemäß (IA) ist 1 ein Element von M . Wenn $k = 1$ ist, sind wir fertig. Andernfalls ist laut (IS) die Zahl

$2 = 1 + 1$ in M enthalten. Falls auch $k \neq 2$, wiederholen wir diesen Schritt $k - 2$ Mal und erhalten dann $k \in M$. $\square$

Wir wollen dies nun so umformulieren, dass die Wahrheit einer Familie von Aussagen $A(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ gezeigt werden kann. Dazu betrachten wir die Menge

$$M := \{m \in \mathbb{N} \mid A(m) \text{ ist wahr}\}.$$

Unter den Annahmen des folgenden Beweisprinzips liefert das obige Induktionsprinzip unmittelbar $M = \mathbb{N}$ und damit somit das behauptete Beweisprinzip.

Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

Es sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage $A(n)$ gegeben. Man geht in zwei Schritten vor.

(IA) Induktionsanfang: Man zeigt, dass $A(1)$ wahr ist.

(IS) Induktionsschluss: Man nimmt an, dass für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ wahr sei (Induktionsvoraussetzung, IV). Dann zeigt man, dass auch $A(n + 1)$ wahr ist.

Wenn (IA) und (IS) nachgewiesen sind, gelten die Aussagen $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Man kann hier die Indexmenge $\mathbb{N}$ durch $\{k, k + 1, \dots\}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ersetzen. Wir diskutieren einige typische Beispiele für die vollständige Induktion.

BEISPIEL 0.1. Es gilt $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

BEWEIS. Wir bezeichnen die behauptete Aussage mit $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir haben $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + 1)$, sodass (IA) wahr ist. Um (IS) zu zeigen, nehmen wir als (IV) an, dass $A(n)$ für ein (festes, aber beliebiges) $n \in \mathbb{N}$ gilt. Daraus folgern wir

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) &= \frac{1}{2}n(n + 1) + (n + 1) = (n + 1)\left(\frac{1}{2}n + 1\right) \\ &= \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2). \end{aligned}$$

Somit ist $A(n + 1)$ und damit (IS) bewiesen. Per vollständiger Induktion ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, was die Behauptung ist. $\square$

Im Induktionsschluss des Beweises muss man eine Beziehung von $A(n + 1)$ und $A(n)$ erkennen und ausnutzen. Hier sieht man, dass sich die linken Seiten nur durch den Summanden $n + 1$ unterscheiden. Also beginnt man mit der linken Seite von $A(n + 1)$ und kann direkt die Induktionsvoraussetzung anwenden. Meist sind an dieser Stelle gewisse Umformungen nötig. Den entstehenden Ausdruck $\frac{1}{2}n(n + 1) + (n + 1)$ versucht man nun zur rechten Seite von $A(n + 1)$ umzuformen. Dazu klammert man den benötigten Faktor $\frac{1}{2}(n + 1)$ aus und stellt erfreut fest, dass sich das Gewünschte ergibt. In den nächsten Beweisen gehen wir ähnlich vor. (In Übungen kann es durchaus schwieriger werden.)

Um die Schreibweise " $1 + \dots + n$ " zu präzisieren, definieren wir rekursiv das Summenzeichen $\sum$. Gegeben seien Zahlen $a_j \in \mathbb{Q}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ mit $j \geq m$, wobei $m \in \mathbb{Z}$ fest gewählt ist. Wir bezeichnen zunächst

$$\sum_{j=m}^m a_j := a_m.$$

Wir nehmen dann an, dass die Summe $\sum_{j=m}^{m+n} a_j \in \mathbb{Q}$ für ein (festes, aber beliebiges) $n \in \mathbb{N}_0$ schon definiert worden ist. Dann setzen wir

$$\sum_{j=m}^{m+n+1} a_j := a_{m+n+1} + \sum_{j=m}^{m+n} a_j \in \mathbb{Q}$$

für dieses n . Nun wenden wir das Induktionsprinzip auf die Menge

$$M := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \sum_{j=m}^{m+n} a_j \text{ ist definiert}\}$$

an. (Die Induktion läuft also über die Anzahl der Summanden.) Da die obigen Definitionen den Bedingungen (IA) und (IS) entsprechen, wird dadurch die Summe

$$\sum_{j=m}^p a_j \in \mathbb{Q}$$

für jedes $p \in \mathbb{Z}$ mit $p \geq m$ definiert. Man schreibt stattdessen auch $a_m + \dots + a_p$. Entsprechend führt man das *Produkt*

$$\prod_{j=m}^p a_j = a_m \cdot \dots \cdot a_p$$

ein. Man setzt dabei abkürzend

$$a^n := \prod_{k=1}^n a \quad \text{und} \quad a^0 := 1$$

für alle $a \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}$. Es gelten offenbar $a^1 = a$ und $a^2 = a \cdot a$.

Per Induktion kann man die Rechenregeln der Bruchrechnung auf die durch $\sum$ und $\prod$ definierten Summen und Produkte ausdehnen. Zum Beispiel gilt

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j\right) + \left(\sum_{j=1}^n b_j\right) = \sum_{j=1}^n (a_j + b_j)$$

für alle $a_j, b_j \in \mathbb{Q}$ mit $j \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

BEWEIS. Wir bezeichnen wieder die behauptete Gleichung mit $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zunächst gilt $A(1)$, da die obige Definition die Identitäten

$$\sum_{j=1}^1 a_j + \sum_{j=1}^1 b_j = a_1 + b_1 = \sum_{j=1}^1 (a_j + b_j)$$

impliziert. Um (IS) nachzuweisen, nehmen wir als (IV) an, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr sei. Indem wir die Definition und in der zweiten Gleichung (IV) verwenden, berechnen wir

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{n+1} a_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{n+1} b_j\right) &= a_{n+1} + \left(\sum_{j=1}^n a_j\right) + b_{n+1} + \left(\sum_{j=1}^n b_j\right) \\ &= (a_{n+1} + b_{n+1}) + \sum_{j=1}^n (a_j + b_j) = \sum_{j=1}^{n+1} (a_j + b_j). \end{aligned}$$

Also ist $A(n+1)$ und somit (IS) gezeigt. Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion impliziert, dass $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist. $\square$

Wir lassen im Folgenden meist die äußeren Klammern weg, wenn klar sein sollte, worauf sich die Summe oder das Produkt bezieht. Die folgende ‘geometrische Summe’ wird später eine wichtige Rolle spielen.

BEISPIEL 0.2. Seien $q \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt die Identität

$$\sum_{j=0}^n q^j = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

BEWEIS. Wieder bezeichne $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die behauptete Identität. Die Aussage $A(0)$ ergibt sich sofort aus der Gleichung

$$\sum_{j=0}^0 q^j = q^0 = 1 = \frac{q - 1}{q - 1}.$$

Um (IS) zu zeigen, nehmen wir als (IV) an, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte. Mittels der Definition der Summe und mit (IV) in der zweiten Gleichung, folgern wir

$$\sum_{j=0}^{n+1} q^j = q^{n+1} + \sum_{j=0}^n q^j = q^{n+1} + \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{q^{n+1}(q - 1) + q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}.$$

Also ist $A(n+1)$ und somit (IS) wahr. Die Behauptung folgt per Induktion. $\square$

Weiter definiert man die *Fakultät* $n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$0! := 1 \quad \text{und} \quad n! := \prod_{j=1}^n j = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Die Fakultäten wachsen rasch an; dies sieht man schon an den ersten fünf: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $5! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Für $n, j \in \mathbb{N}_0$ mit $j \leq n$ ist ferner der *Binomialkoeffizient* durch

$$\binom{n}{j} := \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

gegeben. Ein Beispiel ist

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

Für $j, n \in \mathbb{N}_0$ mit $j \leq n$ genügt der Binomialkoeffizient den Rechenregeln

$$\binom{n}{n-j} = \frac{n!}{(n-j)!(n-n+j)!} = \binom{n}{j}, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{0!n!} = 1, \quad (0.1)$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} \frac{j}{j} + \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{n-j+1}{n-j+1} \\ &= \frac{n!(j+n-j+1)}{j!(n+1-j)!} = \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} = \binom{n+1}{j} \quad \text{für } j \geq 1. \end{aligned} \quad (0.2)$$

Die nächste wichtige Aussage verallgemeinert die einfachen Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{und} \quad (a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

BEISPIEL 0.3. Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt der *binomische Satz*

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j.$$

Mit $a = b = 1$ folgt insbesondere die (überraschende) Gleichung $2^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}$.

BEWEIS. Es sei $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die abgesetzte Identität in der Behauptung. Die Aussage (IA) ergibt sich aus der Beobachtung

$$(a+b)^0 = 1 = \sum_{j=0}^0 \binom{0}{j} a^{0-j} b^j.$$

Um (IS) zu zeigen, nehmen wir als (IV) an, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte. Diese Annahme impliziert

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j+1} b^j + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^{j+1}. \end{aligned}$$

In der letzten Summe setzen wir nun $l = j+1$ (bzw. $j = l-1$), um Exponenten wie in der vorderen Summe zu erhalten. Der neue Index l läuft von 1 bis $n+1$. Danach schreiben wir wieder j statt l und wenden (0.2) an. Dies liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j+1} b^j + \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^{n-(l-1)} b^l \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{j=1}^n \left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right) a^{n-j+1} b^j + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} b^j. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir am Ende auch die Formeln (0.1) ausgenutzt. Man beachte, dass beim Zusammenziehen der Summen die nicht passenden Terme mit $j = 0$ und $l = n+1$ getrennt auftreten. Also gilt $A(n+1)$ und somit (IS). Die Behauptung folgt nun mittels vollständiger Induktion. $\square$

Die obigen Aussagen gelten nicht nur in $\mathbb{Q}$ sondern allgemeiner in *Körpern*, die im nächsten Abschnitt eingeführt werden.

KAPITEL 1

Reelle und komplexe Zahlen

Wir definieren die reellen Zahlen in drei Schritten, indem wir zuerst die für sie geltenden Regeln (*Axiome*) für die algebraischen Verknüpfungen und für die Ordnungsstruktur festlegen und dann die sogenannte Ordnungsvollständigkeit verlangen. Es wird sich in Abschnitt 3.2 zeigen, dass die so eingeführten reellen Zahlen mit denen der Schulmathematik übereinstimmen.

1.1. Geordnete Körper

Sei M eine nichtleere Menge. Eine Abbildung

$$* : M \times M \rightarrow M; \quad (x, y) \mapsto x * y,$$

heißt *Verknüpfung* auf M . Beispiele sind Addition und Multiplikation in $\mathbb{Q}$, also die Abbildungen $+: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}; (x, y) \mapsto x + y$, und $\cdot: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}; (x, y) \mapsto x \cdot y$.

DEFINITION 1.1. *Es sei K eine Menge mit Elementen $0 \neq 1$ und Verknüpfungen $+$ und $\cdot$. Das Quintupel $(K, 0, 1, +, \cdot)$ heißt Körper, falls die folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in K$ erfüllt sind.*

- | | |
|--|----------------------------------|
| (AG+) $(x + y) + z = x + (y + z)$. | (Assoziativgesetz für $+$) |
| (NE+) $x + 0 = x$. | (neutrales Element für $+$) |
| (IE+) $\forall x \in K \quad \exists u \in K \quad \text{mit} \quad x + u = 0$. | (inverse Elemente für $+$) |
| (KG+) $x + y = y + x$. | (Kommutativgesetz für $+$) |
| (AG $\cdot$) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$. | (Assoziativgesetz für $\cdot$) |
| (NE $\cdot$) $x \cdot 1 = x$. | (neutrales Element für $\cdot$) |
| (IE $\cdot$) $\forall x \in K \setminus \{0\} \quad \exists v \in K \quad \text{mit} \quad x \cdot v = 1$. | (inverse Elemente für $\cdot$) |
| (KG $\cdot$) $x \cdot y = y \cdot x$. | (Kommutativgesetz für $\cdot$) |
| (DG) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$. | (Distributivgesetz) |

Man schreibt oft K statt $(K, 0, 1, +, \cdot)$ und xy statt $x \cdot y$.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit den üblichen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ sind ein Körper, $\mathbb{Z}$ ist es nicht (da es z.B. kein $v \in \mathbb{Z}$ mit $2v = 1$ gibt). Der kleinste Körper ist $\mathbb{F}_2 = \{\underline{0}, \underline{1}\}$ mit den Verknüpfungen

$$\underline{0} + \underline{0} = \underline{0}, \quad \underline{0} + \underline{1} = \underline{1} + \underline{0} = \underline{1}, \quad \underline{1} + \underline{1} = \underline{0}, \quad \underline{0} \cdot \underline{0} = \underline{0}, \quad \underline{0} \cdot \underline{1} = \underline{1} \cdot \underline{0} = \underline{0}, \quad \underline{1} \cdot \underline{1} = \underline{1}.$$

Man schreibt für die inversen Elemente $u =: -x$ bzw. $v =: x^{-1} = \frac{1}{x}$ (falls $x \neq 0$), sowie $x - y$ anstelle von $x + (-y)$ und $\frac{x}{y}$ anstelle von $x \cdot \frac{1}{y}$ (falls $y \neq 0$). Man

lässt meist überflüssige Klammern weg, wobei “ $\cdot$ vor $+$ ” gilt; z.B. verwenden wir $x + y + z$ statt $x + (y + z)$ oder $x + yz$ statt $x + (yz)$.

Man kann zeigen, dass die neutralen und inversen Elemente in $(NE+)$, $(IE+)$, $(NE\cdot)$ und $(IE\cdot)$ eindeutig bestimmt sind. Weiter gelten Rechenregeln wie in der Bruchrechnung, so etwa $-(-x) = x$ und $-x = (-1)x$ für alle $x \in K$, $(x^{-1})^{-1} = x$ für alle $x \in K \setminus \{0\}$, und es gilt genau dann $x \cdot y = 0$ für $x, y \in K$, wenn x oder y gleich 0 sind. Für diese und verwandte Aussagen verweisen wir auf die Lineare Algebra und benutzen sie ohne weiteren Kommentar. Dort werden auch andere Beispiele für Körper diskutiert. In den Aussagen und Beweisen in Abschnitt 0.2 kann man $\mathbb{Q}$ durch jeden Körper K ersetzen.

In der Analysis benötigt man oft Ungleichungen, zum Beispiel in Konvergenzbetrachtungen. Dazu führen wir die folgenden Begriffe ein. Andere Klassen von Relationen werden in der Linearen Algebra werden auch ‘Äquivalenzrelationen’ diskutiert.

DEFINITION 1.2. *Sei M eine nichtleere Menge. Eine Relation R auf M ist eine nichtleere Teilmenge von $M \times M$. Man schreibt $x \sim_R y$, falls (x, y) in $R \subseteq M \times M$ liegt. Eine Relation R heißt Ordnung auf M , wenn für alle $x, y, z \in M$ die folgenden Aussagen gelten.*

(R) $x \sim_R x$. (Reflexivität)

(T) Seien $x \sim_R y$ und $y \sim_R z$. Dann gilt $x \sim_R z$. (Transitivität)

(AS) Seien $x \sim_R y$ und $y \sim_R x$. Dann gilt $x = y$. (Antisymmetrie)

Die Ordnung heißt total, wenn für alle $x, y \in M$ stets $x \sim_R y$ oder $y \sim_R x$ gilt.

Man sieht leicht ein, dass auf den Brüchen $\mathbb{Q}$ die üblichen Ordnung $\leq$ (also die Relation $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x \leq y\}$) eine totale Ordnung im obigen Sinne ist. Man kann auch nachprüfen, dass die Relation $R = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m \text{ teilt } n\}$ eine Ordnung auf $\mathbb{N}$ darstellt. Diese ist nicht total, da z.B. 2 nicht 3 und 3 nicht 2 teilt.

Bei einer Ordnung schreibt man statt $\sim_R$ meist “ $\leq_R$ ” oder “ $\leq$ ” und sagt “kleiner gleich”. Man schreibt “ $x < y$ ” und sagt “ x kleiner y ”, wenn $x \leq y$ und $x \neq y$ sind. Weiter haben $y \geq x$ und $x \leq y$, sowie $y > x$ und $x < y$, jeweils die gleiche Bedeutung.

In der folgenden Definition werden die algebraischen und die ordnungstheoretischen Strukturen miteinander verbunden.

DEFINITION 1.3. *Ein geordneter Körper $(K, \leq)$ besteht aus einem Körper $K = (K, 0, 1, +, \cdot)$ und einer totalen Ordnung $\leq$ auf K derart, dass für alle $x, y, z \in K$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.*

(O+) Sei $x < y$. Dann gilt $x + z < y + z$.

(O $\cdot$) Seien $x > 0$ und $y > 0$. Dann gilt $xy > 0$.

Man schreibt meist K statt $(K, \leq)$. Ein $x \in K$ heißt positiv (negativ), wenn $x > 0$ ($x < 0$) gilt, und nichtnegativ (nichtpositiv), wenn $x \geq 0$ ($x \leq 0$) gilt. Man setzt

$$K_+ = \{x \in K \mid x > 0\} \quad \text{und} \quad K_- = \{x \in K \mid x < 0\}.$$

Auf Grund der Totalität der Ordnung gilt $x \leq 0$ oder $x \geq 0$ für jedes $x \in K$, und wegen (AS) folgt aus $x \leq 0$ und $x \geq 0$ schon $x = 0$. Damit ergeben sich

$$K_+ \cap K_- = \emptyset \quad \text{und} \quad K_+ \cup K_- \cup \{0\} = K.$$

Die Brüche $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Ordnung $\leq$ bilden einen geordneten Körper.

Wir zeigen nun einige direkte Folgerungen aus den obigen Definitionen; in den Übungen werden weitere Rechenregeln hergeleitet. In diesem Abschnitt werden die für die Umformungen von Ungleichungen benötigten Definitionen detailliert angegeben. Darauf werden wir später bei einfachen Rechenschritten verzichten.

SATZ 1.4. *Es seien K ein geordneter Körper und $x, y, z \in K$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- a) Die Ungleichung $y > x$ ist äquivalent zu $y - x > 0$.
- b) Die Ungleichungen $x < 0$ und $-x > 0$ sind gleichwertig, und ebenso $x > 0$ und $-x < 0$.
- c) Aus den Relationen $x > 0$ und $y < 0$ folgt $xy < 0$.
- d) Sei $x \neq 0$. Dann ergibt sich $x^2 := x \cdot x > 0$, sodass speziell $1 = 1^2 > 0$ gilt.
- e) Wir haben genau dann $x > 0$, wenn $\frac{1}{x} > 0$ gilt.
- f) Die Ungleichungen $y > x$ und $z > 0$ implizieren $yz > xz$.

In a), b), c) und f) kann man ferner “ $>$ ” durch “ $\geq$ ” ersetzen.

BEWEIS. a) Wir zeigen die beiden Implikationen separat, da das oft übersichtlicher ist. Es gelte $y > x$. Um $y - x$ zu erzielen, addieren wir zu beiden Seiten $-x$. Dann folgt $y - x > x - x = 0$ aus (O+). Nun gelte $y - x > 0$. Hier addieren wir x und erhalten mit (O+) die gewünschte Ungleichung $y = y - x + x > 0 + x = x$.

b) Die erste Äquivalenz folgt aus Teil a) mit $y = 0$. Wenn wir sie auf $-x$ anwenden, ergibt sich die zweite Teilaussage, da $x = -(-x)$ ist.

c) Seien $x > 0$ und $y < 0$. Wir führen die Aussage auf (O·) zurück. Dazu bemerken wir, dass b) die Ungleichung $-y > 0$ liefert. Aus (O·) schließen wir dann $0 < x(-y) = -xy$, was nach b) die Behauptung $xy < 0$ impliziert.

d) Sei $x \neq 0$. Aufgrund der Totalität der Ordnung und b) gilt dann entweder $x > 0$ oder $-x > 0$. Aus (O·) ergibt sich nun $x^2 > 0$, bzw. $0 < (-x)^2 = (-1)(-x)x = x^2$, wenn wir mit x bzw. $-x$ multiplizieren.

e) Sei $x > 0$. Nach d) ist $x^{-2} := (x^{-1})^2 > 0$. Eine Multiplikation mit $x > 0$ führt gemäß (O·) auf $x^{-1} = xx^{-2} > 0$. Mit dem eben Bewiesenen folgern wir umgekehrt aus $x^{-1} > 0$ die Aussage $x = (x^{-1})^{-1} > 0$.

f) Seien $y > x$ und $z > 0$. Gemäß a) haben wir dann $y - x > 0$, sodass (O·) die Ungleichung $0 < (y - x)z = yz - xz$ zeigt. Wieder mit a) folgt Teil f).

Den Zusatz zeigt man dann durch Betrachtung der Gleichheitsfälle. Wir behandeln exemplarisch Behauptung f). Aus $z = 0$ folgt direkt $yz = 0 = xz$, und aus $y = x$ natürlich auch. Zusammen mit dem Ungleichheitsfall haben wir aus $y \geq x$ und $z \geq 0$ die Relation $yz \geq xz$ gefolgert. $\square$

Aus den obigen Aussagen d) und b) kann man z.B. schließen, dass es keine Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{F}_2$ gibt, mit der $(\mathbb{F}_2, \leq)$ ein geordneter Körper wäre. In der Tat gälte dann $\underline{1} > \underline{0} > -\underline{1}$, was aber der in $\mathbb{F}_2$ gültigen Gleichung $\underline{1} = -\underline{1}$ widerspräche.

Den folgenden Begriff benötigen wir wesentlich für die Definition und Untersuchung von Grenzwerten.

DEFINITION 1.5. *Es seien K ein geordneter Körper und $x \in K$. Dann heißt*

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

der Betrag von x .

Der Betrag wird benutzt, um Abstände in geordneten Körpern zu definieren. In $\mathbb{Q}$ entspricht er gerade dem üblichen Betrag. Hier haben etwa -2 und 3 den Abstand $|-2 - 3| = |-(2 + 3)| = 5$. Im nächsten Satz sammeln wir die grundlegenden Eigenschaften des Betrags, die aus der Definition und Satz 1.4 folgen.

SATZ 1.6. *Es seien K ein geordneter Körper und $x, y \in K$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- a) $|x| \geq 0$. $|x| = 0 \iff x = 0$.
- b) $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$, $|x| = |-x|$.
- c) $|xy| = |x| |y|$.
- d) $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- e) $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

BEWEIS. a) Wenn $x \geq 0$ ist, dann liefert Definition 1.5 die Ungleichung $|x| = x \geq 0$. Im Falle $x < 0$ gilt $|x| = -x > 0$, wobei Satz 1.4 b) eingeht. Dies zeigt auch den ersten Teil von b). Die Äquivalenz in a) folgt direkt aus Definition 1.5.

b) Nach dem eben Gesagten müssen wir in b) nur den dritten Teil zeigen. Mittels Definition 1.5 und Satz 1.4 b) berechnen wir dazu

$$|-x| = \begin{cases} -x, & -x \geq 0, \\ -(-x), & -x < 0, \end{cases} = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x, & x > 0, \end{cases} = |x|.$$

c) Seien $x \geq 0$ und $y \leq 0$. Nach Satz 1.4 gilt dann $xy \leq 0$. Definition 1.5 führt nun auf $|xy| = -xy = x(-y) = |x| |y|$. Die anderen drei Fälle behandelt man ähnlich.

d) Wir zeigen die Behauptung getrennt für die beiden Fälle im Betrag auf der linken Seite. Nach b) haben wir die Ungleichungen $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$. Mit (O+) folgern wir die Abschätzungen $x + y \leq |x| + y \leq |x| + |y|$. Gemäß b) liefert dies auch $-(x + y) = (-x) + (-y) \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|$. Zusammen folgt die Aussage aus Definition 1.5.

e) Teil d) impliziert $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$, sodass (O+) die Ungleichung $|x| - |y| \leq |x - y|$ zeigt. Durch Vertauschen von x und y folgert man $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$, wobei auch b) eingeht. Es ergibt sich Teil e). $\square$

Die folgenden Teilmengen geordneter Körper werden eine zentrale Rolle spielen. Wir schreiben dabei etwa $a \leq x < b$ abkürzend für $a \leq x$ und $x < b$.

DEFINITION 1.7. *Es seien K ein geordneter Körper und $a, b \in K$ mit $a < b$. Dann definiert man die beschränkten Intervalle durch*

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in K \mid a \leq x \leq b\}, & (a, b) &= \{x \in K \mid a < x < b\}, & [a, a] &= \{a\}, \\ [a, b) &= \{x \in K \mid a \leq x < b\}, & (a, b] &= \{x \in K \mid a < x \leq b\}, \end{aligned}$$

und die unbeschränkten Intervalle durch

$$\begin{aligned} [a, \infty) &= \{x \in K \mid x \geq a\}, & (-\infty, a] &= \{x \in K \mid x \leq a\}, \\ (a, \infty) &= \{x \in K \mid x > a\}, & (-\infty, a) &= \{x \in K \mid x < a\}. \end{aligned}$$

Die Intervalle $[a, b]$, $[a, a]$, $[a, \infty)$ und $(-\infty, a]$ heißen abgeschlossen und (a, b) , $(-\infty, a)$ und (a, ∞) heißen offen.

Wir diskutieren zwei Zahlenbeispiele, um das Rechnen mit Ungleichungen, Beträgen und Fallunterscheidungen etwas zu üben. Man beachte, dass man Äquivalenzumformungen benötigt, um alle Lösungen zu bestimmen.

Beispiel 1. Die Menge aller $x \in \mathbb{Q}$ mit $|2x - 3| + 2 > 3x - 5$ ist das Intervall $(-\infty, 4)$ in $\mathbb{Q}$. Um dies zu zeigen, löst man zunächst den Betrag auf und erhält

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3, & x \geq 3/2, \\ 3 - 2x, & x < 3/2. \end{cases}$$

Demgemäß unterscheidet man nun zwei Fälle, in denen wir die entstehenden Ungleichungen jeweils nach x auflösen.

1. Fall. Sei $x \geq 3/2$. Dann wird aus $|2x - 3| + 2 > 3x - 5$ die Ungleichung

$$3x - 5 < 2x - 3 + 2 = 2x - 1.$$

Nach (O+) ist diese Relation äquivalent zu $3x < 2x + 4$ (wobei man 5, bzw. -5 für die umgekehrte Implikation, addiert), und diese gleichwertig zu $x < 4$ (wobei man $-2x$, bzw. $2x$, addiert). Also gilt die behauptete Ungleichung für alle $x \in [3/2, 4)$, und sie ist falsch für alle $x \geq 4$.

2. Fall. Sei $x < 3/2$. Nun ist die Ungleichung $|2x - 3| + 2 > 3x - 5$ zu

$$3x - 5 < 3 - 2x + 2 = 5 - 2x$$

äquivalent. Wie oben schließen wir aus (O+), dass diese Relation gleichwertig zu $5x < 10$ ist. Mit Satz 1.4f) formt man dies äquivalent zu $x < 2$ um, indem man $1/5$, bzw. 5, multipliziert. Somit gilt die Aussage für alle $x < 3/2$.

Wenn man die beiden Fälle zusammenfügt, folgt die Behauptung. $\diamond$

Beispiel 2. Die Menge aller $x \in \mathbb{Q}$ mit $|x-1| \leq |x+2|$ ist das Intervall $[-1/2, \infty)$ in $\mathbb{Q}$. Zur Begründung ersetzen wir wieder die Beträge durch Fallunterscheidungen:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1, \\ 1-x, & x < 1, \end{cases} \quad |x+2| = \begin{cases} x+2, & x \geq -2, \\ -x-2, & x < -2. \end{cases}$$

Dies führt nun auf vier Fälle, die wir nach dem ersten Betrag sortieren.

Fall 1a). Seien $x \geq 1$ und $x \geq -2$. Dies ist äquivalent zur Ungleichung $x \geq 1$, und man kann $|x-1| \leq |x+2|$ durch $x-1 \leq x+2$ ersetzen. Durch Addition von $-x$, bzw. x , wird die Ungleichung laut (O+) gleichwertig zu $-1 \leq 2$ umgeformt. Diese Relation ist wahr und folglich lösen alle $x \in [1, \infty)$ das Problem.

Fall 1b). Seien $x \geq 1$ und $x < -2$. Solche x gibt es in $\mathbb{Q}$ nicht, sodass in diesem Fall keine Lösungen existieren.

Fall 2a). Seien $x < 1$ und $x \geq -2$, also $x \in [-2, 1)$. In diesem Fall wird $|x-1| \leq |x+2|$ zu $1-x \leq x+2$. Durch Addition mit $x-2$, bzw. $2-x$, folgern wir wieder mittels (O+), dass die Ungleichung zu $-1 \leq 2x$ äquivalent ist. Gemäß Satz 1.4f) überführt eine Multiplikation mit $1/2$, bzw. 2 , diese Relation in $x \geq -1/2$. Also lösen $x \in [-1/2, 1)$ das Problem, aber nicht $x \in [-2, -1/2)$.

Fall 2b). Seien $x < 1$ und $x < -2$, also $x < -2$. Hier betrachten wir $1-x \leq -x-2$, was man wie bisher durch Addition von $\pm x$ zu $1 \leq -2$ umformen kann. Da diese Aussage in $\mathbb{Q}$ falsch ist, gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Die Behauptung folgt nun durch die Kombination aller Fälle. $\diamond$

Abschließend beweisen wir die *Bernoullische Ungleichung*, die wir für einige Konvergenzbetrachtungen heranziehen werden. Danach folgt eine gleichfalls benötigte, aber wenig erstaunliche Aussage über Mittelwerte.

Satz 1.8. *Es seien K ein geordneter Körper, $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

BEWEIS. Wir beweisen die Aussage per Induktion. Für $n = 1$ gilt sie offensichtlich. Die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}$. Mit dieser Induktionsvoraussetzung und Satz 1.4f) erhalten wir

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x,$$

wobei wir auch $1+x \geq 0$, sowie am Ende (O+) und $nx^2 \geq 0$ (nach Satz 1.4) verwendet haben. $\square$

Lemma 1.9. *Es seien K ein geordneter Körper und $a, b \in K$ mit $a < b$. Setze $2 := 1+1 \in K$. Dann gilt $a < \frac{1}{2}(a+b) < b$.*

BEWEIS. Mittels (O+) schließen wir aus $a < b$ in zwei Schritten auf

$$2a = a+a < a+b < b+b = 2b.$$

Laut Satz 1.4f) bleiben diese Ungleichungen bei Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ erhalten. $\square$

1.2. Suprema und reelle Zahlen

In diesem Abschnitt diskutieren wir weitere Begriffe in geordneten Körpern, um in Definition 1.17 die letzte definierende Eigenschaft reeller Zahlen einführen zu können. Hierbei werden wir einige Male ‘indirekte’ Beweise verwenden, die generell von großer Bedeutung in der Mathematik sind. Deswegen besprechen wir zuerst einige Sachverhalte aus der Logik.

Kontraposition und indirekter Beweis. Wir beginnen mit einer wichtigen Äquivalenz aus der Logik. Seien A und B Aussagen. Dann ist die Implikation

$$A \Rightarrow B \quad \text{gleichwertig zur ihrer Kontraposition} \quad \neg B \Rightarrow \neg A.$$

Als ein illustrierendes Beispiel betrachten wir die Folgerung $(n = 3) \Rightarrow (n < 5)$ und die umgekehrte Implikation $(n \geq 5) \Rightarrow (n \neq 3)$ für die Negationen. Die behauptete Äquivalenz zeigen wir mittels einer ‘Wahrheitstafel’, die wesentlich ausnutzt, dass jede Aussage entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	w	f	f	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Hierbei geben wir zuerst alle vier Kombinationen von w und f für die Grundaussagen A und B an. Die Aussage $A \Rightarrow B$ wird durch die Angabe von w und f für jede dieser Kombination festgelegt. Falls A wahr ist, ist $A \Rightarrow B$ genau dann wahr, wenn auch B wahr ist. Falls jedoch A falsch ist, ist die Implikation unabhängig von B wahr, da man aus einer falschen Annahme alles ableiten kann. Die Negationen $\neg B$ und $\neg A$ haben gegenüber B und A die vertauschten Wahrheitswerte. Man bildet dann die sechste Spalte analog zur dritten. Da diese beiden gleich sind, hängen die zugehörigen Aussagen in gleicher Weise von den Wahrheitswerten von A und B ab. Damit sind sie äquivalent. (Siehe auch die Vorlesung Lineare Algebra.)

Ein mathematischer Satz ist im Prinzip von der Form $A \Rightarrow B$ für die Voraussetzung A und die Behauptung B , wobei wir (natürlich) nur an dem Fall wahrer A interessiert sind. Somit ist der Satz genau dann wahr, wenn B wahr ist.

In einem direkten Beweis findet man solche weiteren Aussagen $C, D, \dots$, dass $A \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow \dots \Rightarrow B$ gilt und damit der Satz gezeigt ist. Die Beweise der Sätze 1.4 und 1.6 sind im Grunde von dieser Form. Manchmal ist es aber einfacher, die gleichwertige Kontraposition $\neg B \Rightarrow \neg A$ in entsprechender Weise nachzuweisen.

In indirekten Beweisen geht man anders vor. Man nutzt aus, dass B entweder wahr oder falsch ist, und *nimmt an*, dass B falsch sei. Daraus (und auch A verwendend) folgert man die Falschheit einer gewissen Aussage C , von der man aber weiß, dass sie wahr ist. Dieser *Widerspruch* zeigt, dass B nicht falsch sein kann und somit wahr ist.

Wir kehren nun zur Diskussion geordneter Körper zurück und führen mit Hilfe der Ordnung beschränkte Teilmengen und besondere Elemente von ihnen ein.

DEFINITION 1.10. *Es seien K ein geordneter Körper und $M \subseteq K$ nichtleer.*

a) *Ein Element a aus K ist eine obere (bzw. untere) Schranke von M , wenn $a \geq m$ (bzw. $a \leq m$) für alle $m \in M$ gilt. Wenn so eine Schranke a existiert, dann heißt M von oben (bzw. von unten) beschränkt.*

b) *Die Menge M heißt beschränkt, wenn sie von oben und von unten beschränkt ist. Andernfalls heißt M unbeschränkt.*

c) *Ein Element x von K ist ein Maximum (bzw. Minimum) von M , wenn x in M liegt und x eine obere (bzw. untere) Schranke von M ist. Man schreibt dann $x = \max M$ (bzw. $x = \min M$).*

Zur Illustration geben wir ein Zahlenbeispiel in $\mathbb{Q}$ an. Die Menge $M = [0, 1) \cup \{2\}$ hat z.B. die oberen Schranken 2 oder 5, während $3/2$ keine obere Schranke ist. Weiter ist $2 \in M$ ein Maximum von M . Wir diskutieren weitere Beispiele im allgemeinen Rahmen geordneter Körper. Hier bieten sich öfter indirekte Beweise an, da man ein besseres Verständnis von der Negation als der Aussage selbst hat.

BEISPIEL 1.11. Sei K ein geordneter Körper und $b \in K$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

a) Das Intervall $M = (-\infty, b]$ hat die obere Schranke b (sowie jedes $b' > b$). Da b in M liegt, ist es ein Maximum. Weiter ist M nicht nach unten beschränkt.

BEWEIS. Die ersten zwei Behauptungen folgen direkt aus den Definitionen 1.7 und 1.10. Für die letzte nehmen wir an, dass M eine untere Schranke $a \in K$ hätte. Also gilt $a \leq m$ für alle $m \in M$ und speziell $a \leq b$. Da -1 nach Satz 1.4 negativ ist, schließen wir dann aus (O+) auf die Ungleichungen $a - 1 < a \leq b$. Also liegt $a - 1$ in M und somit ist $a \leq a - 1 < a$, was falsch ist. Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung. $\square$

b) Das Intervall $N = (-\infty, b)$ hat die obere Schranke b (sowie jedes $b' > b$) und kein Maximum.

BEWEIS. Wieder ist die erste Behauptung klar. Wir nehmen an, dass N ein Maximum a besäße. Da dann a in N liegt, gilt $a < b$. Lemma 1.9 liefert dann die Ungleichungen $a < \frac{1}{2}(a + b) < b$, sodass auch $\frac{1}{2}(a + b)$ in N enthalten ist. Dies ist unmöglich, da a eine obere Schranke von N ist. Also hat N kein Maximum. $\square$

c) Es gilt $0 = \min\{x^2 \mid x \in K\}$, da zum einen nach Satz 1.4 Quadrate nichtnegativ sind und zum anderen $0^2 = 0$ ist. $\diamond$

Aufgrund der folgenden Beobachtung bezeichnen $\max M$ und $\min M$ tatsächlich einzelne Elemente von K (und nicht größere Teilmengen), sodass die Schreibweisen $x = \max M$ und $x = \min M$ sinnvoll sind.

BEMERKUNG 1.12. Eine nichtleere Teilmenge M eines geordneten Körpers hat höchstens ein Maximum und höchstens ein Minimum.

BEWEIS. Seien etwa x und y zwei Maxima von M . Da beide in M liegen und obere Schranken sind, erhalten wir $x \leq y$ und $y \leq x$. Gemäß (AS) sind also x und y gleich. Minima behandelt man genauso. $\square$

Wir kommen zu zwei wichtigen Begriffen der Vorlesung, die allgemeiner als Minimum und Maximum sind und z.B. in Beispiel 1.11 b) verwendet werden können.

DEFINITION 1.13. *Es seien K ein geordneter Körper und $\emptyset \neq M \subseteq K$.*

a) *Sei M nach oben beschränkt. Wenn es eine kleinste obere Schranke b von M gibt, so heißt diese Supremum von M , und man schreibt $b = \sup M$.*

b) *Sei M nach unten beschränkt. Wenn es eine größte untere Schranke a von M gibt, so heißt diese Infimum von M , und man schreibt $a = \inf M$.*

Man beachte, dass in $\mathbb{Q}$ Suprema oder Infima nicht immer existieren, siehe Beispiel 1.16. Wir betrachten ein offenes Intervall.

BEISPIEL 1.14. In Beispiel 1.11 b) gilt $b = \sup(-\infty, b)$.

BEWEIS. Wir wissen aus Beispiel 1.11, dass b eine obere Schranke von $(-\infty, b)$ ist. Wir nehmen an, es gäbe eine obere Schranke $x < b$ von $(-\infty, b)$. Nach Lemma 1.9 gilt dann $x < \frac{1}{2}(x + b) < b$, sodass $\frac{1}{2}(x + b)$ in $(-\infty, b)$ liegt. Somit kann x keine obere Schranke sein. $\square$

Wir sammeln einige einfache, aber wichtige Eigenschaften der obigen Konzepte.

BEMERKUNG 1.15. Sei M eine nichtleere Teilmenge eines geordneten Körpers K . Dann gelten die folgenden Aussagen.

a) Wenn das Supremum von M existiert, dann ist es das Maximum der oberen Schranken von M . Entsprechend ist $\inf M$ das Maximum der unteren Schranken von M , soweit es existiert. Diese Charakterisierungen folgen aus den Definitionen 1.10 und 1.13.

b) Wegen a) und Bemerkung 1.12 besitzt M höchstens ein Supremum und höchstens ein Infimum.

c) Wenn $\max M$ bzw. $\min M$ existieren, dann sind sie schon das Supremum bzw. das Infimum von M . In der Tat ist z.B. $\max M$ eine obere Schranke und als Element von M kleiner gleich jeder anderen oberen Schranke.

d) Wenn Supremum und Infimum von M existieren, dann gilt $\inf M \leq m \leq \sup M$ für alle $m \in M$.

e) Setze $-M = \{-x \mid x \in M\}$. (Zum Beispiel gilt in $\mathbb{Q}$ die Gleichung $-[-2, 3] = [-3, 2]$.) Genau dann ist $b \in K$ eine untere Schranke von M , wenn $-b$ eine obere von $-M$ ist. (Nach einer Übung ist $b \leq m$ äquivalent zu $-b \geq -m$.) Obere Schranken erfüllen eine entsprechende Aussage. Weiter existiert $\inf M$ genau dann, wenn $\sup(-M)$ existiert, und dann gilt $\inf M = -\sup(-M)$.

BEWEIS. Sei zuerst b das Maximum einer Teilmenge P von K . Dann ist $-b \in -P$ eine untere Schranke von $-P$. Also ist $-b$ das Minimum von $-P$.

Wir wenden dies auf die Menge P der unteren Schranken von M an. Die Menge M besitze ein Infimum. Nach a) und der Vorüberlegungen ist dieses gleich

$$\begin{aligned}\max P &= -\min(-P) = -\min\{-a \mid a \in K \text{ ist untere Schranke von } M\} \\ &= -\min\{c \mid c \in K \text{ ist obere Schranke von } -M\} = -\sup(-M)\end{aligned}$$

Hier haben wir $-a$ durch c ersetzt. Insbesondere besitzt $-M$ ein Supremum. Entsprechend folgert man die Existenz von $\inf M$ aus der von $\sup(-M)$. $\square$

f) Sei $M \subseteq N \subseteq K$. Wenn $\sup N$ und $\sup M$ existieren, dann ist $\sup N$ eine obere Schranke von N und damit der Teilmenge M , sodass $\sup M \leq \sup N$ gilt. Entsprechend erhalten wir $\inf M \geq \inf N$, wenn $\inf N$ und $\inf M$ existieren. $\diamond$

BEISPIEL 1.16. Die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ ist nach oben beschränkt und hat kein Supremum in $\mathbb{Q}$.

BEWEIS. 1) Wenn $x \geq 2$ ist, folgen die Ungleichungen $x^2 \geq 2x \geq 4$. Somit liegt x nicht in M . Per Negation sehen wir, dass jedes Element x von M kleiner als 2 sein muss. Also ist 2 eine obere Schranke von M .

2) Wir nehmen an, dass $s := \sup M$ in $\mathbb{Q}$ existierte. Dann gibt es teilerfremde $p, q \in \mathbb{N}$ mit $s = p/q$. Gemäß Lemma 1.27 unten gilt nun $s^2 = 2$ und also $p^2 = 2q^2$, sodass p^2 gerade ist. Folglich ist p gerade (für ein ungerades p wäre auch p^2 ungerade) und es gibt ein $r \in \mathbb{N}$ mit $p = 2r$. Wir schließen daraus $2q^2 = 4r^2$, sodass $q^2 = 2r^2$ gerade ist. Damit sind p und q gerade, was ihrer Teilerfremdheit widerspricht. $\square$

Wir fügen ein letztes Axiom hinzu, um die Existenz von Suprema sicher zu stellen. Dies schließt $\mathbb{Q}$ aus.

DEFINITION 1.17. *Ein geordneter Körper K , in dem jede nach oben beschränkte nichtleere Menge ein Supremum besitzt, heißt ordnungsvollständig. (Nach Bemerkung 1.15 e) hat dann auch jede nach unten beschränkte nichtleere Menge ein Infimum.) Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind ein ordnungsvollständiger geordneter Körper.*

Gemäß den Definitionen 1.3 und 1.7 schreiben wir $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ und $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$. Ferner setzen wir $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$ und $\mathbb{R}_{\leq 0} = (-\infty, 0]$. Nach Beispiel 1.16 ist $\mathbb{Q}$ ist nicht ordnungsvollständig. Wir besprechen die obige Definition ein wenig.

Man kann $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ als Teilmengen von $\mathbb{R}$ auffassen. Dies geschieht dadurch, dass man ausgehend von 0 und 1 in $\mathbb{R}$, induktiv die Elemente $2 := 1 + 1$, $3 := 2 + 1$ usw. definiert, womit man $\mathbb{N}_0$ erhält. Die Operationen $-n$ und m/n für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ führen dann auf $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Q}$. Man kann nachrechnen, dass neben den Elementen 0 und 1 auch die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, sowie die Ordnung $\leq$ von $\mathbb{R}$ mit den bekannten Strukturen auf $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ übereinstimmen.

Ferner kann man $\mathbb{R}$ wie in Definition 1.17 ausgehend von der Mengentheorie konstruieren. Dabei ist $\mathbb{R}$ durch Definition 1.17 "eindeutig bestimmt". Diese Sachverhalte sind nicht Gegenstand dieser Vorlesung, da sie recht umfangreich und begrifflich anspruchsvoll sind. Verwandte allgemeinere Konstruktionen werden in

späteren Vorlesungen besprochen. Gleichwohl sei hier auf Theorem I.1.10 in [1] für eine Beweisskizze und auf die Monographien [2] und [3] für eine detaillierte Darstellung verwiesen.

Wir zeigen nun eine wichtige Charakterisierung von Suprema und Infima.

SATZ 1.18. *Seien $s \in \mathbb{R}$ und $M \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer.*

a) *Sei M nach oben beschränkt. Genau dann ist s das Supremum von M , wenn s eine obere Schranke von M ist und*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in M \quad \text{mit} \quad s - \varepsilon < x_\varepsilon \leq s.$$

b) *Sei stattdessen M nach unten beschränkt. Genau dann ist s das Infimum von M , wenn s eine untere Schranke von M ist und*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in M \quad \text{mit} \quad s \leq x_\varepsilon < s + \varepsilon.$$

BEWEIS. a) Sei $s = \sup M$. Gemäß Definition 1.13 ist dann s eine obere Schranke von M und für alle $\varepsilon > 0$ ist $s - \varepsilon$ keine obere Schranke von M . Somit existiert wie behauptet ein $x_\varepsilon \in M \cap (s - \varepsilon, s]$. Es gelten umgekehrt diese beiden Eigenschaften, und $r \in (-\infty, s)$ sei eine weitere obere Schranke von M . Setze $\varepsilon = s - r > 0$. Nach Voraussetzung gibt es dann ein Element x_ε von M mit $r = s - \varepsilon < x_\varepsilon$, was ein Widerspruch ist. Dies zeigt die erste Äquivalenz.

b)¹ Sei $s = \inf M$. Nach Definition 1.13 ist s eine untere Schranke von M und für alle $\varepsilon > 0$ ist $s + \varepsilon$ keine untere Schranke von M . Also gibt es ein $x_\varepsilon \in M \cap [s, s + \varepsilon)$. Es gelten umgekehrt diese beiden Eigenschaften, und $r > s$ sei eine weitere untere Schranke von M . Setze $\varepsilon = r - s > 0$. Dann existiert ein Element x_ε von M mit $r = s + \varepsilon > x_\varepsilon$. Dieser Widerspruch impliziert die zweite Behauptung. $\square$

Wir verwenden den obigen Satz zuerst um zu zeigen, dass in $\mathbb{Z}$ Suprema und Infima tatsächlich Maxima und Minima sind. Daraus folgen wichtige Eigenschaften von $\mathbb{R}$, die bei Konvergenzuntersuchungen von großem Nutzen sind.

SATZ 1.19. *Sei M eine nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$. Dann hat M ein Minimum. Insbesondere hat eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein Minimum (da sie die untere Schranke 1 besitzt). Wenn $\emptyset \neq N \subseteq \mathbb{Z}$ nach oben beschränkt ist, dann hat diese Menge ein Maximum.*

BEWEIS. Gemäß Definition 1.17 existiert $x := \inf M$. Satz 1.18 mit $\varepsilon = 1/2$ liefert dann eine Zahl $m_0 \in M \cap [x, x + \frac{1}{2})$. Somit ist m_0 kleiner als $m + \frac{1}{2}$ für jedes $m \in M$, woraus $m > m_0 - \frac{1}{2}$ folgt. Da für $m \in \mathbb{Z} \setminus \{m_0\}$ stets $|m - m_0| \geq 1$ gilt, erhalten wir $m_0 \leq m$ für alle $m \in M$. Also ist m_0 das Minimum von M . Die letzte Behauptung zeigt man genauso. $\square$

SATZ 1.20. a) *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Zahl $n_x \in \mathbb{N}$ mit $n_x > x$.*

b) *Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existiert eine Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $1/n_\varepsilon < \varepsilon$.*

c) *Die Zahl $x \in \mathbb{R}$ erfülle $x \leq 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $x \leq 0$.*

¹Dieser Beweis wurde in der Vorlesung ausgelassen.

BEWEIS. a) Wir nehmen an, es gäbe eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 1.19 hätte dann $\mathbb{N}$ ein Maximum N . Diese Eigenschaft steht aber im Widerspruch zu $N < N + 1 \in \mathbb{N}$, sodass a) gezeigt ist.

b) Nach a) mit $x = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, gibt es eine Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $n_\varepsilon > 1/\varepsilon$, also $\varepsilon > 1/n_\varepsilon$.

c) Wenn $x > 0$ wäre, gäbe es nach b) eine natürliche Zahl n_0 mit $x > 1/n_0$, was der Voraussetzung in c) widerspricht. $\square$

Ein erster Ausflug ins Unendliche. Wir beginnen mit einigen allgemeinen Definitionen und fügen erste Eigenschaften an. Diese Sachverhalte werden wir später vertiefen, siehe auch die Vorlesung Lineare Algebra.

DEFINITION 1.21. Seien M , N und P nichtleere Mengen.

a) Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt injektiv, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ stets $f(x) \neq f(y)$ gilt. Sie nennt man surjektiv, wenn es für alle $z \in N$ ein $x \in M$ mit $f(x) = z$ gibt. Eine injektive und surjektive Abbildung ist bijektiv.

b) Für ein bijektives $f : M \rightarrow N$ existiert die Umkehrabbildung (oder Inverse) $f^{-1} : N \rightarrow M$; $y \mapsto f^{-1}(y) = x$, wobei $x \in M$ das eindeutig bestimmte Element mit $f(x) = y$ ist.

c) Für Abbildungen $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow P$ ist die Komposition (oder Verknüpfung) von g und f durch $g \circ f : M \rightarrow P$; $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, gegeben.

BEMERKUNG 1.22. Seien M , N und P nichtleere Mengen, sowie $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow P$ bijektive Abbildungen.

a) Die Umkehrabbildung $f^{-1} : N \rightarrow M$ ist auch bijektiv, da sie für jedes $x \in M$ das eindeutige Urbild $y = f(x) \in N$ hat.

b) Auch die Komposition $g \circ f : M \rightarrow P$ ist bijektiv mit der Inversen $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. In der Tat, gilt für $z \in P$ die Gleichung $(g \circ f)(f^{-1}(g^{-1}(z))) = g(g^{-1}(z)) = z$. Ferner folgt aus $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ wegen der Injektivität von g die Gleichheit $f(x) = f(y)$ und damit $x = y$, da auch f injektiv ist. $\diamond$

Wir nutzen nun Bijektionen, um endliche und unendliche Mengen einzuführen.

DEFINITION 1.23. Zwei nichtleere Mengen M und N heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung $f : M \rightarrow N$ gibt. Wenn M und $\{1, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gleichmächtig sind, so schreibt man $\#M = n$ und nennt M endlich. Wenn dies für kein $n \in \mathbb{N}$ gilt, so heißt M unendlich und man setzt $\#M = \infty$.

Diese Begriffe gehen auf Georg Cantor zurück. Wir geben hier nur einige einfache Eigenschaften und erste Beispiele in $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ an, siehe Abschnitt 3.2 für $\mathbb{R}$.

BEMERKUNG 1.24. a) Sei $\#M = n \in \mathbb{N}$. Dann können wir $x_k = f^{-1}(k)$ für die Abbildung f aus Definition 1.23 und $k \in \{1, \dots, n\}$ setzen. Daraus erhalten wir $M = \{x_1, \dots, x_n\}$.

b) Mittels Teil a) sieht man sofort, dass eine Teilmenge einer endlichen Menge endlich ist. Per Negation folgt dann, dass eine Obermenge einer unendlichen Menge auch unendlich ist.

c) Seien M und N gleichmächtig. Dann gilt $\#M = \#N$. Um dies nachzuweisen, sei zuerst $\#M = n \in \mathbb{N}$. Wir haben dann Bijektionen $f : M \rightarrow N$ und $g : M \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Laut Bemerkung 1.22 ist auch $g \circ f^{-1} : N \rightarrow \{1, \dots, n\}$ bijektiv, was $\#N = n = \#M$ zeigt. Insbesondere ist N genau dann endlich, wenn dies auf M zutrifft. Damit ist auch deren Unendlichkeit äquivalent. $\diamond$

SATZ 1.25. a) Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ ist die Menge $M = \{j \in \mathbb{Z} \mid j \geq m\}$ unendlich.

b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > a$ ist die Menge $N = \{x \in \mathbb{Q} \mid a < x < b\}$ unendlich.

BEWEIS. a) Wir nehmen an, es gäbe ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\#M = n$. Wie in Bemerkung 1.24 gesehen, können wir dann $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ schreiben. Dann liegt die Zahl $y = |x_1| + \dots + |x_n| + 1 > x_k \geq m$ in $\mathbb{Z}$. Sie ist also ein Element von M , was unmöglich ist, da y größer als jedes x_k ist.

b) Nach Satz 1.20 existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < b - a$. Also gilt $nb > 1 + na$. Satz 1.19 liefert ein minimales $m \in \mathbb{Z}$ mit $m > na$, woraus $na < m \leq 1 + na < nb$ folgt. Somit liegt $x_1 := m/n$ in (a, b) . Aus Satz 1.20 erhalten wir ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1/k < x_1 - a$. Damit genügt der Bruch $x_2 := x_1 - 1/k$ den Ungleichungen $a < x_2 < x_1 < b$. Iterativ erhalten wir eine Teilmenge $N_0 = \{x_1, x_2, \dots\}$ von N . Wegen der Bijektivität der Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow N_0$; $f(n) = x_n$, ist die Menge N_0 gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ und damit nach a) unendlich. Aus Bemerkung 1.24 folgt nun die Unendlichkeit der Obermenge N . $\square$

1.3. Potenzen mit rationalen Exponenten

Wir werden im vierten Kapitel allgemeine Potenzen einführen. Da wir aber zuvor zumindest Wurzeln benötigen, definieren wir schon jetzt Potenzen a^q mit rationalen Exponenten $q = m/n$ und der Basis $a > 0$. Die hier verwendete Definition ist direkter, aber umständlicher als die spätere. Wir gehen in drei Schritten vor.

A) Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir zunächst $a^n = \prod_{k=1}^n a$ und $a^0 = 1$, sowie $a^{-n} := (a^n)^{-1}$ wenn $a \neq 0$. Per Kehrbruch erhält man auch $a^n = (a^{-n})^{-1}$. Wir zeigen unten die Rechenregeln für diese ganzzahlige Potenzen. Um die Potenzgesetze plausibel zu machen, berechnen wir z.B. für das erste

$$a^m b^m = a \cdot \dots \cdot a \cdot b \cdot \dots \cdot b = ab \cdot \dots \cdot ab = (ab)^m, \quad m \in \mathbb{N},$$

wobei die Punkte für m -fache Produkte stehen. Man benötigt aber vollständige Induktion, um diese Punkte präzise zu fassen. Im Hinblick auf die Definition behandelt man dabei negative Exponenten per Kehrbruch (und Fallunterscheidungen).

LEMMA 1.26. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$, wobei $a, b \neq 0$ sein sollen, wenn k oder m negativ sind. Dann gelten die folgenden Aussagen.

$$a) \ a^m b^m = (ab)^m. \quad b) \ a^k a^m = a^{k+m}. \quad c) \ (a^k)^m = a^{km} = (a^m)^k.$$

d) Seien $a, b \geq 0$. Dann ist $a < b$ äquivalent zu $a^n < b^n$, sowie $a \leq b$ zu $a^n \leq b^n$.

BEWEIS. a) 1) Sei zuerst $m \in \mathbb{N}_0$. Wir gehen induktiv vor. Behauptung a) ist klar für $m = 0$. Sie gelte für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Daraus und aus der obigen Definition folgen die Gleichungen

$$a^{m+1}b^{m+1} = aa^m bb^m = ab(ab)^m = (ab)^{m+1}.$$

Per vollständiger Induktion ist Teil a) für $m \in \mathbb{N}_0$ gezeigt.

2) Sei $m < 0$. Da dann $-m > 0$ ist, liefert Schritt 1) die Identität $a^{-m}b^{-m} = (ab)^{-m}$. Aussage a) erhalten wir nun per Kehrruch durch

$$a^m b^m = \frac{1}{a^{-m}} \frac{1}{b^{-m}} = \frac{1}{(ab)^{-m}} = (ab)^m.$$

b) 1) Wähle ein (festes) $k \in \mathbb{N}_0$. Die Formel in b) ist offenbar wahr für $m = 0$. Sie gelte für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Wie oben berechnen wir

$$a^k a^{m+1} = a^k a^m a = a^{k+m} a = a^{k+m+1}.$$

Vollständige Induktion impliziert die Aussage b) für $k, m \in \mathbb{N}_0$.

2) Seien nun $k, m < 0$. Aus Teil 1) erhalten wir $a^{-k}a^{-m} = a^{-k-m} = a^{-(k+m)}$, woraus wieder im Kehrruch die Behauptung folgt.

3) Schließlich sei $km < 0$. Wenn $k + m < 0$ sein sollte, betrachten wir $-m$ und $-k$, deren Produkt auch negativ ist. Also können wir $k + m > 0$ annehmen. Sei dann etwa $k > 0 > m$ (sonst vertausche man die Buchstaben). Schritt 1) liefert nun $a^{-m}a^{k+m} = a^{k+m-m} = a^k$. Eine Multiplikation mit a^m zeigt Behauptung b).

c) Sei $k \in \mathbb{Z}$. 1) Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Wieder folgt die Aussage für $m = 0$ leicht aus der Definition. Sie gelte für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Auch Teil b) verwendend, erhalten wir dann

$$(a^k)^{m+1} = (a^k)^m a^k = a^{km} a^k = a^{(m+1)k}.$$

Somit ist die erste Gleichung in c) für $m \in \mathbb{N}_0$ induktiv gezeigt.

2) Sei $m < 0$. Schritt 1) führt auf $(a^k)^{-m} = a^{-km}$, was im Kehrruch $(a^k)^m = a^{km}$ nach sich zieht. Die zweite Gleichung in c) folgt wegen $km = mk$.

d) 1) Sei $0 < a < b$. Daraus ergibt sich $a^2 < ab < b^2$ und per Induktion $a^n < b^n$. Dies gilt auch für $0 \leq a < b$. Ferner impliziert $a = b$ die Gleichung $a^n = b^n$.

2) Wenn wir in 1) für $<$ die Rollen von a und b vertauschen, erhalten wir per Negation, dass aus $a^n \leq b^n$ die Ungleichung $a \leq b$ folgt. Also ist die zweite Äquivalenz in d) gezeigt. Die andere ergibt sich entsprechend. $\square$

Wir geben ein kleines Rechenbeispiel zur Verdeutlichung an:

$$(3^2)^3 6^{-3} = 3^6 2^{-3} 3^{-3} = 3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3.$$

B) Nun erfolgt der Hauptschritt, in dem wir die n -te Wurzel w von $a > 0$ konstruieren. Dazu lösen wir die Gleichung $w^n = a$ mittels Ordnungsvollständigkeit.

LEMMA 1.27. Seien $a \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}$. Die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid x^n \leq a\}$ besitzt ein Supremum w in $\mathbb{R}$. Dieses ist die einzige Lösung von $w^n = a$ in $\mathbb{R}_+$.

BEWEIS. 1) Die Menge M ist nichtleer, da 0 in M liegt. Für $x \geq 1 + a$ folgen aus Lemma 1.26 d) und Satz 1.8 die Ungleichungen $x^n \geq (1 + a)^n \geq 1 + na > a$, sodass x nicht in M liegt. Per Negation sehen wir, dass $1 + a$ eine obere Schranke von M ist. Somit existiert nach Definition 1.17 das Supremum $w := \sup M \geq 0$.

2) Wir nehmen an, dass $w^n < a$ gälte. Dann setzen wir

$$\varepsilon := \min \left\{ 1, \frac{a - w^n}{(1 + w)^n} \right\} \in (0, 1].$$

Der binomische Satz aus Beispiel 0.3, Formel (0.1) und Lemma 1.26 d) implizieren

$$\begin{aligned} (w + \varepsilon)^n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} w^j \varepsilon^{n-j} = w^n + \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} w^j \varepsilon^{n-j-1} \\ &\leq w^n + \varepsilon \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} w^j 1^{n-j-1} = w^n + \varepsilon (w + 1)^n \leq a. \end{aligned}$$

Am Ende haben wir die Definition von ε ausgenutzt. Damit gehört $w + \varepsilon$ zu M . Weiter gilt $w + \varepsilon > w$, was der Definition von w widerspricht. Also erhalten wir $w^n \geq a > 0$, woraus mit Lemma 1.26 d) auch $w > 0$ folgt.

3)² Wir nehmen an, dass $w^n > a$ gälte. Wir setzen nun

$$\varepsilon := \min \left\{ 1, \frac{w^n - a}{(1 + w)^n} \right\} \in (0, 1].$$

Wie in Teil 2) berechnen wir

$$\begin{aligned} (w - \varepsilon)^n &= \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} w^j \varepsilon^{n-j} \geq w^n - \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} w^j \varepsilon^{n-j-1} \\ &\geq w^n - \varepsilon \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} w^j 1^{n-j-1} = w^n - \varepsilon (w + 1)^n \geq a. \end{aligned}$$

Andererseits liefert Satz 1.18 eine Zahl $x_\varepsilon \in M$ mit $0 \leq w - \varepsilon < x_\varepsilon \leq w$. Mittels Lemma 1.26 d) ergibt sich dann der Widerspruch $(w - \varepsilon)^n < x_\varepsilon^n \leq a$, da x_ε in M liegt. Somit gilt $w^n = a$.

4) Es gelte auch $v^n = a$ für ein $v \in \mathbb{R}_+$. Also haben wir sowohl $v^n \leq w^n$ als auch $w^n \leq v^n$. Lemma 1.26 d) impliziert nun $v \leq w$ und $w \leq v$, und somit $v = w$. $\square$

C) Nun können wir die gewünschten Potenzen definieren.

DEFINITION 1.28. Es seien $a \in \mathbb{R}_+$ und $q = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei w wie in Lemma 1.27 gegeben. Dann definieren wir die n -te Wurzel von a durch $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} := w$ und die q -te Potenz durch $a^q := (a^{\frac{1}{n}})^m$. Falls $q > 0$ setzen wir auch $0^q := 0$. Wir schreiben $\sqrt{a}$ statt $\sqrt[2]{a}$.

²Dieser Teil wurde in der Vorlesung ausgelassen.

Die Wurzel ist also durch die Gleichung $(\sqrt[n]{a})^n = a$ charakterisiert. Wir zeigen nun die grundlegenden Rechenregeln der Potenzen.

SATZ 1.29. Seien $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \in \mathbb{R}$ und $p, q \in \mathbb{Q}$, wobei $a, b > 0$ sind, falls $p < 0$ oder $q < 0$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

- a) $a^q b^q = (ab)^q$. b) $a^p a^q = a^{p+q}$. c) $(a^p)^q = a^{pq} = (a^q)^p$.
 d) Sei $b > a > 0$. Dann gilt $b^q > a^q > 0$ für $q > 0$, und $a^q > b^q > 0$ für $q < 0$.
 e) $|x| = \sqrt{x^2}$.

BEWEIS. Seien $a, b > 0$, $p = \frac{k}{l}$ und $q = \frac{m}{n}$ für $l, n \in \mathbb{N}$ und $k, m \in \mathbb{Z}$. (Für $a = 0$ oder $b = 0$ sind die Aussagen klar.) Wir führen die Behauptungen auf Lemma 1.27 und Definition 1.28 zurück, wobei zuerst die Wurzeln betrachtet werden und auch Lemma 1.26 eingeht.

a) Lemmas 1.26 und 1.27 zeigen $(a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}})^n = (a^{\frac{1}{n}})^n (b^{\frac{1}{n}})^n = ab$. Also liefert Definition 1.28 die Gleichung $a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$. Wir bilden davon die m -te Potenz und erhalten mittels Definition 1.28 und Lemma 1.27 die Behauptung a) durch

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = ((ab)^{\frac{1}{n}})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m (b^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}.$$

b) Ähnlich wie in a) berechnen wir

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = ((a^{\frac{1}{n}})^m)^n = (a^{\frac{1}{n}})^{mn} = a^m,$$

und erhalten somit $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$. Daraus folgt mittels Lemmas 1.26 und 1.27

$$(a^p a^q)^{ln} = ((a^{\frac{k}{l}})^{\frac{1}{l}})^{ln} ((a^{\frac{m}{n}})^{\frac{1}{n}})^{ln} = (a^{\frac{k}{l}})^n (a^{\frac{m}{n}})^l = a^{kn+lm}.$$

Wenn wir nun die ln -te Wurzel ziehen, ergibt sich b).

c) Die erste Gleichung in c) erhalten wir wie in b) aus der Rechnung

$$[(a^p)^q]^{ln} = [(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{1}{n}}]^{ln} = [(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{1}{n}}]^l = (a^{\frac{m}{n}})^l = (a^{\frac{k}{l}})^m = a^{km}$$

und dem Ziehen der ln -ten Wurzel. Die zweite Gleichung in c) ist eine Konsequenz der ersten, da $pq = qp$ gilt.

d) Nach Lemma 1.26 d) folgt aus $b^{\frac{1}{n}} \leq a^{\frac{1}{n}}$ die Ungleichung $b \leq a$. Per Negation folgt Behauptung d) für $m = 1$. Lemma 1.26 d) impliziert dann die Aussage für $m \in \mathbb{N}$. Für negative m erhalten wir sie im Kehrbuch, eine Übung verwendend.

e) Nach Definition 1.5 haben wir $|x|^2 = x^2$ für $x \geq 0$ und $|x|^2 = (-x)^2$ für $x < 0$. Also gilt $|x|^2 = x^2$, woraus die Behauptung mit Definition 1.28 folgt. $\square$

Auch hier illustrieren wir die Potenzgesetze durch ein Rechenbeispiel:

$$(6^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} 2^{-\frac{3}{2}} = \frac{6^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

Wir betonen, dass Wurzeln nicht additiv sind. Zum Beispiel gilt $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$ für alle $x, y > 0$, siehe die Übungen.

1.4. Komplexe Zahlen

Wir wollen die Gleichung $x^2 = -1$ lösen. Nach Satz 1.4 hat diese Gleichung in einem geordneten Körper keine Lösung, also insbesondere nicht in $\mathbb{R}$. Wir erweitern nun $\mathbb{R}$ zu einem (nicht geordneten) Körper, um eine Lösung zu erhalten. Für $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir dazu die Addition und die Multiplikation

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v), \quad (x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

Es ergibt sich speziell $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$. Wir schreiben nun 1 statt $(1, 0)$, i statt $(0, 1)$ und $x + iy = z$ statt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Insbesondere gilt dann $i^2 = -1$.

Wir definieren dementsprechend die *komplexen Zahlen*

$$\mathbb{C} := \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Dabei fassen wir $\mathbb{R}$ als die Teilmenge $\{z = x + i \cdot 0 \mid x \in \mathbb{R}\}$ von $\mathbb{C}$ auf. Für $z = x + iy$ und $w = u + iv$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ erklären wir die Verknüpfungen

$$z + w := (x + u) + i(y + v) \in \mathbb{C}, \quad zw = z \cdot w := (xu - yv) + i(xv + yu) \in \mathbb{C},$$

wobei in den Klammern nur reelle Operationen stehen. Die Körpereigenschaften von $\mathbb{R}$ implizieren leicht, dass $(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot)$ ein Körper ist. Die Inversen sind durch

$$-z = -x - iy \quad \text{und} \quad \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{für } z \neq 0$$

gegeben. Für $z = x$ und $w = u$ in $\mathbb{R}$ erhält man die reellen Verknüpfungen. Durch die obige Identifikation der Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit dem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ haben wir also die Ebene mit der üblichen Vektoraddition und einer neuen Multiplikation so versehen, dass ein Körper entsteht. Wir führen nun wichtige Bezeichnungen ein.

DEFINITION 1.30. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann heißt $x = \operatorname{Re} z$ der Realteil von z , $y = \operatorname{Im} z$ der Imaginärteil von z , $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ der Betrag von z und $\bar{z} = x - iy$ das komplex Konjugierte von z .

Dabei entspricht $\bar{z}$ dem an der x -Achse gespiegelten Punkt $(x, -y)$. Der komplexe Betrag $|z|$ ist gleich der euklidischen Länge des Vektors (x, y) in $\mathbb{R}^2$. Wenn $z = x$ in $\mathbb{R}$ liegt, dann stimmt der komplexe Betrag $|z| = \sqrt{x^2}$ nach Satz 1.29 mit dem reellen Betrag $|x|$ überein. Wir definieren schließlich für den Mittelpunkt $z \in \mathbb{C}$ und den Radius $r > 0$ die Mengen

$$\begin{aligned} B(z, r) &:= \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| < r\} && \text{(die offene Kreisscheibe),} \\ \overline{B}(z, r) &:= \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| \leq r\} && \text{(die abgeschlossene Kreisscheibe),} \\ S(z, r) &:= \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| = r\} && \text{(die Kreislinie).} \end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt hierbei etwa $B(x, r) \cap \mathbb{R} = (x - r, x + r)$. Neben Kreisen können wir z.B. Halbebenen komplex beschreiben. Für gegebene $a, b \in \mathbb{R}$ sind etwa

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > a\} \quad \text{und} \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \leq b\}$$

die Halbebene rechts von der vertikalen Geraden $x = a$ bzw. die Halbebene unterhalb und inklusive der horizontalen Geraden $y = b$.

Wir zeigen nun wichtige Eigenschaften der Operationen in $\mathbb{C}$ meistens durch direktes Nachrechnen. Insbesondere verhält sich der komplexe Betrag im wesentlichen wie der reelle, vergleiche Satz 1.6.

SATZ 1.31. Für $w, z \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Aussagen.

- a) $\bar{\bar{z}} = z$; $|z|^2 = z\bar{z}$; $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, wenn $z \neq 0$.
- b) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.
- c) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.
- d) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$, $|\bar{z}| = |z|$.
- e) $|z| \geq 0$; $z = 0 \iff |z| = 0$.
- f) $|zw| = |z||w|$. Insbesondere gilt $|-z| = |z|$.
- g) $|z+w| \leq |z| + |w|$. (Dreiecksungleichung)
- h) $|z-w| \geq ||z| - |w||$.

BEWEIS. Es seien $z = x + iy$ und $w = u + iv$ für $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.

a) Es gelten $\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x + iy$ und $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$, woraus auch die dritte Gleichung folgt.

b) Wir haben $\overline{z+w} = \overline{x+u - i(y+v)} = \bar{z} + \bar{w}$ und

$$\overline{zw} = \overline{(x+iy)(u+iv)} = \overline{xu - yv + i(xv + yu)} = (xu - yv) - i(xv + yu) = \bar{z}\bar{w}.$$

c) Aus den Gleichungen $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\operatorname{Re} z$ folgt die erste Behauptung, und aus $z - \bar{z} = x + iy - x + iy = 2iy = 2i\operatorname{Im} z$ die zweite.

d) Satz 1.29 liefert $|\operatorname{Re} z| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ und analog die zweite Aussage. Für die letzte berechnen wir $|\bar{z}| = |x + i(-y)| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |z|$.

e) Nach d) impliziert $|z| = 0$ schon $z = 0$. Die anderen Teile sind klar.

f) Aus a) und b) schließen wir $|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$. Die Behauptung erhalten wir, indem wir die Wurzel ziehen.

g) Die Aussagen a), b), c), d) und f) liefern

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Mit Wurzelziehen folgt Behauptung g). Diese impliziert Teil h) wie in Satz 1.6. $\square$

Wir schließen mit einem Zahlenbeispiel. Es gilt

$$z := \frac{2+3i}{-1+2i} = \frac{(2+3i)(1+2i)}{(-1+2i)(1+2i)} = \frac{2+4i+3i+6i^2}{-1+4i^2} = \frac{-4+7i}{-5} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i.$$

Daraus folgen $\operatorname{Re} z = \frac{4}{5}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{7}{5}$, $-z = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$, $\bar{z} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$ und

$$|z| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{49}{25}} = \frac{\sqrt{65}}{5}, \quad \frac{1}{z} = \frac{-1+2i}{2+3i} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{25}{65} \left(\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i \right) = \frac{1}{13}(4+7i).$$

Literaturverzeichnis

- [1] H. Amann und J. Escher, *Analysis I*. Dritte Auflage. Birkhäuser, 2006.
- [2] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, D. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel und R. Remmert, *Zahlen*. Dritte verbesserte Auflage. Springer-Verlag, 1992.
- [3] E. Landau, *Grundlagen der Analysis*. Dritte Auflage. Chelsea Publishing, 1960.