

Analysis 2

Skriptum Sommersemester 2021

Dieses Skriptum folgt meiner Vorlesung im Sommersemester 2021, wobei gelegentlich kleinere Korrekturen und Ergänzungen vorgenommen wurden. Die Nummerierung hat sich an wenigen Stellen geändert. Die Beweise und Rechnungen im Skriptum sind typischerweise etwas knapper gehalten als in der Vorlesung. Es fehlen darüber hinaus die meisten Schaubilder und viele der mündlichen Erläuterungen aus der Vorlesung. Verweise auf ‘Analysis 1’ beziehen sich auf mein gleichnamiges Skriptum vom Wintersemester 2020/21. Ich verwende aber auch Begriffe, Notation und Standardresultate aus dieser Vorlesung ohne weiteren Kommentar.

Ich bedanke mich herzlich bei Johanna Dettweiler, Jakob Ditchen und Andreas Geyer-Schulz für ihre Unterstützung bei der Erstellung früherer Versionen des Skriptums, sowie bei Andreas Geyer-Schulz für die Erstellung der Bilder.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Integralrechnung	1
1.1. Das Riemann-Integral	1
1.2. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	5
1.3. Uneigentliche Riemann-Integrale	13
1.4. Skalare Differentialgleichungen erster Ordnung	18
Kapitel 2. Konvergenz und Stetigkeit	23
2.1. Normierte Vektorräume und metrische Räume	23
2.2. Topologische Grundbegriffe	35
2.3. Stetigkeit	42
2.4. Kompaktheit und Wegzusammenhang	54
Kapitel 3. Differentialrechnung	63
3.1. Differenzierbarkeit und Ableitungsregeln	63
3.2. Satz von Taylor und lokale Extrema	81
3.3. Der Umkehrsatz	88
Kapitel 4. Kurvenintegrale	101
4.1. Kurvenlänge	101
4.2. Kurvenintegrale und Potentiale	104
Kapitel 5. Gewöhnliche Differentialgleichungen	110
5.1. Einführung	110
5.2. Wohlgestelltheit und globale Existenz	114
5.3. Lineare Probleme	123
5.4. Langzeitverhalten	135
Literaturverzeichnis	140

KAPITEL 1

Integralrechnung

Soweit nichts anderes gesagt wird, seien a und b reelle Zahlen mit $a < b$.

1.1. Das Riemann-Integral

Wir wollen den Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer (nichtnegativen) Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und der x -Achse bestimmen. Dazu approximieren wir diese Fläche durch die Vereinigung von Rechtecken, deren Inhalt durch eine *Riemann-Summe* gegeben ist. Diese werden zuerst etwas aufwändig eingeführt.

Wir schreiben $|I| = \beta - \alpha$ für die Länge eines beschränkten Intervalls I mit Infimum α und Supremum β . Wir erinnern auch an die Schreibweise $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ aus Definition 4.38 in Analysis 1.

DEFINITION 1.1. *Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Eine markierte Zerlegung Z von $[a, b]$ ist eine Menge der Form*

$$Z = \{(t_0, t_1, \dots, t_n), (\tau_1, \dots, \tau_n) \mid t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b, \\ \tau_k \in I_k = I_k^Z := [t_{k-1}, t_k] \text{ für alle } k \in \{1, \dots, n\}\}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben dafür kurz $Z = \{t_k, \tau_k \mid k \leq n\}$. Die Zahlen t_k heißen *Zerlegungsstellen* und die τ_k *Markierungen*. Die *Feinheit* von Z ist $|Z| = \max\{t_k - t_{k-1} \mid k \in \{1, \dots, n\}\}$. Die Menge aller markierten Zerlegungen von $[a, b]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{Z}_\tau(a, b)$.

Die Riemann-Summe von f für $Z \in \mathcal{Z}_\tau(a, b)$ ist durch

$$S(f, Z) = \sum_{k=1}^n f(\tau_k)(t_k - t_{k-1})$$

gegeben. Für $[a, a]$ setzen wir $\mathcal{Z}_\tau(a, a) = \{Z_a\}$ mit $Z_a = \{t_0 = a = t_1, \tau_0 = a\}$ und definieren analog die (triviale) Riemann-Summe $S(f, Z_a) = f(a)(a - a) = 0$.

Wir führen nun die Klasse der Funktionen ein, für die wir eine Integrationstheorie entwickeln wollen.

DEFINITION 1.2. *Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stückweise stetig, wenn es einen Index $N \in \mathbb{N}$ und Zahlen $a = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_N = b$ so gibt, dass für jedes $j \in \{1, \dots, N\}$ die Einschränkung $f|_{I_j^\theta} : I_j^\theta := (\theta_{j-1}, \theta_j) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x)$, stetig ist und für $x \rightarrow \theta_{j-1}^+$ und $x \rightarrow \theta_j^-$ einen Grenzwert besitzt. Die Menge dieser Funktionen wird mit $PC([a, b])$ bezeichnet.*

BEMERKUNG 1.3. a) Es sei f wie in Definition 1.2. Dann hat $f|_{I_j^\theta}$ eine stetige Fortsetzung $f_j : [\theta_{j-1}, \theta_j] \rightarrow \mathbb{R}$. Nach Theorem 4.24 in Analysis 1 sind dann alle Funktionen f_j , und damit auch f , beschränkt.

b) Es gilt $C([a, b]) \subseteq PC([a, b])$. Für ein Intervall $I \subseteq [a, b]$ liegt $\mathbb{1}_I$ in $PC([a, b])$.

c) Es seien $f, g \in PC([a, b])$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind auch αf , $f + g$, fg und $|f|$ Elemente von $PC([a, b])$.

BEWEIS. Seien θ_j^f und θ_k^g die Zwischenstellen für f und g gemäß Definition 1.2. Wir bilden ihre Vereinigung $\{\theta_1, \dots, \theta_L\} := \{\theta_1^f, \dots, \theta_M^f\} \cup \{\theta_1^g, \dots, \theta_N^g\}$. Nach Voraussetzung sind f und g stetig auf (θ_{l-1}, θ_l) und konvergieren für $x \rightarrow \theta_{l-1}^+$ und $x \rightarrow \theta_l^-$. Gemäß der Sätze 4.12 und 4.6 in Analysis 1 übertragen sich diese Eigenschaften auf die Funktionen $f + g$ und fg . Also liegen diese in $PC([a, b])$. Analog behandelt man αf und $|f|$. $\square$

Der folgende Hauptsatz wird auf Cauchys Definition des Integrals führen.

THEOREM 1.4. Sei $f \in PC([a, b])$. Dann gibt es so eine Zahl $J \in \mathbb{R}$, dass für jede Folge $(Z_n)_n$ in $\mathcal{Z}_\tau(a, b)$ mit $|Z_n| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ die Riemann-Summen $S(f, Z_n)$ gegen J konvergieren. Dabei hängt J nicht von den Funktionswerten $f(\theta_j)$ aus Definition 1.2 ab.

BEWEIS. Wir betrachten zuerst stetige Funktionen f und isolieren dafür zunächst den Hauptschritt des Beweises, bevor wir die Aussage herleiten. Danach untersuchen wir f aus $PC([a, b])$ in einem zweiten Teil.

1) Sei $f \in C([a, b])$. Nach Theorem 4.19 in Analysis 1 ist f gleichmäßig stetig. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es also einen Abstand $\delta_\varepsilon > 0$ mit

$$\forall x, y \in [a, b] \text{ mit } |x - y| \leq \delta_\varepsilon : |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon. \quad (1.1)$$

a) Gegeben seien markierte Zerlegungen $Z = \{t_k, \tau_k \mid k \leq n\}$ und $W = \{s_j, \sigma_j \mid j \leq m\}$ in $\mathcal{Z}_\tau(a, b)$, die der Abschätzung $|Z|, |W| \leq \delta_\varepsilon/2$ genügen. Um die Differenz $S(f, Z) - S(f, W)$ abzuschätzen, müssen wir die Zuwächse $t_k - t_{k-1}$ und $s_j - s_{j-1}$ zueinander passend aufspalten. Dazu verwenden wir die verfeinerten Zerlegungsstellen $R = \{r_0, \dots, r_p\} := \{t_0, \dots, t_n\} \cup \{s_0, \dots, s_m\}$.

Sei $l \in \{1, \dots, p\}$. Dann existiert genau ein Index $k = k(l) \in \{1, \dots, n\}$ mit $I_l^R := [r_{l-1}, r_l] \subseteq I_k^Z$. Wir definieren $\tau'_l := \tau_k$. Entsprechend gibt es genau ein $j = j(l) \in \{1, \dots, m\}$ mit $I_l^R \subseteq I_j^W$, und wir setzen $\sigma'_l := \sigma_j$. Somit gelten $\tau'_l - \sigma'_l = \tau_k - \sigma_j$ und $I_l^R \subseteq I_k^Z \cap I_j^W$. Insbesondere überlappen sich I_k^Z und I_j^W , woraus die Ungleichung $|\tau'_l - \sigma'_l| = |\tau_k - \sigma_j| \leq 2\delta_\varepsilon/2 = \delta_\varepsilon$ folgt. Aussage (1.1) liefert also die Abschätzung

$$|f(\tau'_l) - f(\sigma'_l)| \leq \varepsilon,$$

die die Kleinheit von $S(f, Z) - S(f, W)$ sichern wird.

Umgekehrt gibt es für jedes $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ genau einen Index $l(k) \in \{0, 1, \dots, p\}$ mit $t_k = r_{l(k)}$. Für $k \geq 1$ können wir somit

$$t_k - t_{k-1} = r_{l(k)} - r_{l(k)-1} + r_{l(k)-1} - \dots - r_{l(k-1)+1} + r_{l(k-1)+1} - r_{l(k-1)}$$

schreiben. Dabei gelten passend $\tau_k = \tau'_{l(k)} = \dots = \tau'_{l(k-1)+1}$, sowie $l(0) = 0 < l(1) < \dots < l(n) = p$. Genauso gehen wir bei den Zuwächsen $s_j - s_{j-1}$ und den Markierungen σ_j vor. Mittels dieser Überlegungen berechnen wir

$$\begin{aligned} |S(f, Z) - S(f, W)| &= \left| \sum_{k=1}^n f(\tau_k)(t_k - t_{k-1}) - \sum_{j=1}^m f(\sigma_j)(s_j - s_{j-1}) \right| \\ &= \left| \sum_{l=1}^p (f(\tau'_l) - f(\sigma'_l))(r_l - r_{l-1}) \right| \leq \sum_{l=1}^p |f(\tau'_l) - f(\sigma'_l)| (r_l - r_{l-1}) \\ &\leq \varepsilon \sum_{l=1}^p (r_l - r_{l-1}) = \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

b) Wir betrachten nun markierte Zerlegungen $Z_n \in \mathcal{Z}_\tau(a, b)$ mit $|Z_n| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gibt es so einen Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, dass $|Z_n| \leq \delta_\varepsilon/2$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt. Schritt a) zeigt nun die Ungleichung

$$|S(f, Z_n) - S(f, Z_m)| \leq \varepsilon(b - a)$$

für alle $n, m \geq N_\varepsilon$. Damit ist $(S(f, Z_n))_n$ eine Cauchyfolge und hat nach Theorem 2.27 in Analysis 1 einen Grenzwert J .

c) Seien $W_n \in \mathcal{Z}_\tau(a, b)$ weitere markierte Zerlegungen mit $|W_n| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Nach b) konvergiert auch die Folge $(S(f, W_n))_n$ gegen eine Zahl $\tilde{J}$. Wir können so einen Index $\tilde{N}_\varepsilon \geq N_\varepsilon$ wählen, dass $|W_n| \leq \delta_\varepsilon/2$ für alle $n \geq \tilde{N}_\varepsilon$ erfüllt ist. Aus Teil a) folgt somit die Abschätzung

$$|S(f, Z_n) - S(f, W_n)| \leq \varepsilon(b - a)$$

für alle $n \geq \tilde{N}_\varepsilon$. Diese Ungleichung liefert $|J - \tilde{J}| \leq \varepsilon(b - a)$ im Limes $n \rightarrow \infty$. Es folgt $J = \tilde{J}$, da $\varepsilon > 0$ beliebig ist. Die erste Aussage ist für stetige f bewiesen.

2) Sei $f \in PC([a, b])$ mit den Punkten $\theta_0 = a < \theta_1 < \dots < \theta_M = b$ wie in Definition 1.2 und den Funktionen $f_j \in C([\theta_{j-1}, \theta_j])$ aus Bemerkung 1.3.

a) Gegeben seien $Z_n = \{t_{k,n}, \tau_{k,n} \mid k \leq N_n\}$ in $\mathcal{Z}_\tau(a, b)$ mit $|Z_n| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1, \dots, M\}$ definieren wir eine Zerlegung $Z_n^j \in \mathcal{Z}_\tau(\theta_{j-1}, \theta_j)$. Ihre Zerlegungsstellen sind alle $t_{n,k} \in [\theta_{j-1}, \theta_j]$, sowie θ_{j-1} und θ_j . Wenn $I_k^{Z_n} \subseteq [\theta_{j-1}, \theta_j]$ ist, behalten wir die Markierung $\tau_{k,n}$. Nur wenn θ_j bzw. θ_{j-1} ungleich allen $t_{n,k}$ ist, entsteht in Z_n^j ein neues Teilintervall gegenüber Z_n . Für dieses wählen wir θ_j bzw. θ_{j-1} als Markierung. Da $|Z_n^j| \leq |Z_n|$, streben die Riemann-Summen $S(f_j, Z_n^j)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen eine Zahl J_j laut Schritt 1). Weil die Funktionen f_j unabhängig von den Werten $f(\theta_j)$ sind, gilt dies auch für die Grenzwerte J_j und für $J := J_1 + \dots + J_M$.

b) Andererseits unterscheiden sich $S(f, Z_n)$ und $S(f_1, Z_n^1) + \dots + S(f_M, Z_n^M)$ höchstens bei den Summanden, in denen θ_j ein Intervall $I_k^{Z_n}$ (echt) zerteilt. In der Differenz der Terme gibt es davon für jedes n maximal $3(M - 1)$ Stück, die jeweils kleiner gleich $\|f\|_\infty |Z_n|$ sind. Also konvergiert

$$|S(f, Z_n) - (S(f_1, Z_n^1) + \dots + S(f_M, Z_n^M))| \leq 3(M - 1)\|f\|_\infty |Z_n| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

und somit $S(f, Z_n) \rightarrow J$.

c) Gegeben seien auch $W_n \in \mathcal{Z}_\tau(a, b)$ mit $|W_n| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Wir definieren wie oben die Zerlegungen $W_n^j \in \mathcal{Z}_\tau(\theta_{j-1}, \theta_j)$ für $j \in \{1, \dots, M\}$. Nach den Schritten 1) und 2a) konvergieren die Riemann-Summen $S(f_j, W_n^j)$ gegen J_j für $n \rightarrow \infty$. Andererseits gilt die abgesetzte Ungleichung in 2b) auch mit W_n und W_n^j statt Z_n und Z_n^j , sodass auch $S(f, W_n)$ gegen J strebt. $\square$

Wir können nun das Integral definieren. In unserem Rahmen stammt die Definition von Cauchy (1823). Wie in Bemerkung 1.7 angedeutet, hat Riemann den Integralbegriff 1854 auf eine größere Funktionenklasse erweitert. Für unsere Zwecke reichen stückweise stetige Funktionen aber völlig aus.

DEFINITION 1.5. Sei $f \in PC([a, b])$. Die Zahl J aus Theorem 1.4 heißt (Riemann-)Integral von f und man schreibt

$$J = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f dt, \quad \text{sowie} \quad \int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt \quad \text{und} \quad \int_a^a f(t) dt = 0.$$

Für jedes $Z \in \mathcal{Z}_\tau(a, b)$ und $r \in \mathbb{R}$ erhält man $S(r\mathbb{1}_{[a,b]}, Z) = r(b-a)$. Somit gilt

$$\int_a^b r dt = r(b-a). \quad (1.2)$$

Weniger triviale Beispiele werden wir später behandeln, wenn wir mehr Theorie zur Verfügung haben.

Im nächsten Satz sammeln wir die grundlegenden Eigenschaften des Integrals. Im Folgenden werden (fast) immer diese Eigenschaften und nicht Definition 1.5 verwendet. Man beachte dabei, dass nach Bemerkung 1.3 alle im Satz vorkommenden Funktionen in $PC([a, b])$ liegen. Wir bezeichnen ferner die Einschränkung von $f \in PC([a, b])$ auf ein Teilintervall ebenfalls mit f .

SATZ 1.6. Es seien $f, g \in PC([a, b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $c, d, e \in [a, b]$ und $I \subseteq [a, b]$ ein Intervall mit $x = \inf I$ und $y = \sup I$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

- a) $\int_a^b \mathbb{1}_I(t) dt = |I|$ und speziell $\int_a^b \mathbb{1}_{\{c\}}(t) dt = 0$.
- b) $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$. (Linearität)
- c) $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$, $\int_a^b \mathbb{1}_I(t) f(t) dt = \int_x^y f(t) dt$.
- d) Sei $f(t) \leq g(t)$ für alle $t \in [a, b]$. Dann ist $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$. (Monotonie)
- e) $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \leq (b-a) \|f\|_\infty$. (Standardabschätzung)
- f) $\int_c^d f(t) dt + \int_d^e f(t) dt = \int_c^e f(t) dt$. (Additivität in den Integralgrenzen)

BEWEIS. Den ersten Teil von c) haben wir in Schritt 2) des Beweises von Theorem 1.4 gezeigt (sogar für endlich viele Zwischenstellen). Der zweite Teil folgt dann aus der Beobachtung

$$\int_a^b \mathbb{1}_I(t) f(t) dt = \int_a^x 0 \cdot f(t) dt + \int_x^y 1 \cdot f(t) dt + \int_y^b 0 \cdot f(t) dt = \int_x^y f(t) dt,$$

wobei das Beispiel (1.2) mit $r = 0$ verwendet wurde. Behauptung a) ergibt sich aus c) mit $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$ kombiniert mit (1.2) für $r = 1$.

Für Teil b) seien $Z_n = \{t_{k,n}, \tau_{k,n} \mid k \leq m_n\}$ markierte Zerlegungen in $\mathcal{Z}_\tau(a, b)$ mit $|Z_n| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} S(\alpha f + \beta g, Z_n) &= \sum_{k=1}^{m_n} (\alpha f(\tau_{k,n}) + \beta g(\tau_{k,n}))(t_{k,n} - t_{k-1,n}) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{m_n} f(\tau_{k,n})(t_{k,n} - t_{k-1,n}) + \beta \sum_{k=1}^{m_n} g(\tau_{k,n})(t_{k,n} - t_{k-1,n}) \\ &= \alpha S(f, Z_n) + \beta S(g, Z_n). \end{aligned}$$

Nach Theorem 1.4 oben und Satz 2.7 in Analysis 1 konvergiert diese Gleichung für $n \rightarrow \infty$ gegen die in b) behauptete Identität.

Aussage d) zeigt man ähnlich wie b). Die erste Abschätzung in e) beweisen wir entsprechend durch

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^{m_n} f(\tau_{k,n})(t_{k,n} - t_{k-1,n}) \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S(|f|, Z_n) = \int_a^b |f(t)| dt,$$

wobei Satz 2.9 in Analysis 1 und die Dreiecksungleichung eingehen. Der zweite Teil ergibt sich aus Behauptung d) und der Relation $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$ für $t \in [a, b]$.

Aussage f) ist eine direkte Konsequenz von c), wenn $c \leq d \leq e$ gilt. Sei etwa $c \leq e \leq d$. Dann folgern wir aus Aussage c) die Gleichung

$$\int_c^d f(t) dt = \int_c^e f(t) dt + \int_e^d f(t) dt = \int_c^e f(t) dt - \int_d^e f(t) dt,$$

und daraus die Behauptung. Die anderen Fälle in f) behandelt man analog. $\square$

BEMERKUNG 1.7. Beschränkte Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißen Riemann-integrierbar, wenn sie den Aussagen von Theorem 1.4 genügen. Für sie gilt Satz 1.6 analog. (Siehe etwa Abschnitt 18 in [4].) Die Funktion $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ ist nicht Riemann-integrierbar, da $S(f, Z) = 0$ ist, falls $\tau_k \notin \mathbb{Q}$ für alle k gilt, und $S(f, Z) = 1$, falls $\tau_k \in \mathbb{Q}$ für alle k . $\diamond$

1.2. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der Hauptsatz besagt grob gesprochen, dass das Integrieren die Umkehroperation zum Ableiten ist. Auf diesem fundamentalen Zusammenhang beruhen insbesondere die Methoden, mit denen Integrale berechnet werden.

DEFINITION 1.8. Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f , wenn F differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt. Man schreibt dann $F = \int f = \int f(t) dt$ oder $F = f^{[1]}$.

Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann gilt das auch für $F + c\mathbb{1}_{[a,b]}$ und jedes feste $c \in \mathbb{R}$. Das nächste Lemma liefert uns Stammfunktionen mittels Integration, indem es zeigt, dass die Ableitung des Integrals nach der oberen Grenze gerade

der Integrand ist, **wenn** er stetig ist. Das ist der Schlüssel zum Hauptsatz. Das einfache, aber zentrale Argument im Beweis zeigt, wie das Integral einen singulären Nenner kontrollieren kann.

LEMMA 1.9. Sei $f \in PC([a, b])$ in $x_0 \in [a, b]$ stetig. Dann ist das unbestimmte Integral $F_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; $F_0(x) = \int_a^x f(t) dt$, in x_0 differenzierbar mit Ableitung $F_0'(x_0) = f(x_0)$.

BEWEIS. Sei $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$ mit $x \rightarrow x_0$. Aus Satz 1.6 und der Stetigkeit von f bei x_0 folgern wir die behauptete Konvergenz

$$\begin{aligned} \left| \frac{F_0(x) - F_0(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \\ &\leq \frac{|x - x_0|}{|x - x_0|} \sup_{|t - x_0| \leq |x - x_0|} |f(t) - f(x_0)| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0. \quad \square \end{aligned}$$

Im oben angekündigten *Hauptsatz* zeigen wir zunächst, dass jede Stammfunktion F bis auf eine Konstante durch das unbestimmte Integral gegeben ist. Wenn man eine Stammfunktion kennt, erhält man so eine Formel für $\int_a^x f(t) dt$. Teil b) klärt zusammen mit Lemma 1.9 das Verhältnis von Ableitung und Integration. Das Theorem folgt leicht aus dem Lemma und der Tatsache, dass (auf einem Intervall) nur Konstanten eine verschwindende Ableitung haben. Aber natürlich steckt die Arbeit in Theorem 1.4, welches das unbestimmte Integral bereitstellt.

THEOREM 1.10. a) Sei $f \in C([a, b])$. Dann ist jede Stammfunktion F von f durch die Gleichung

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt$$

für alle $x \in [a, b]$ gegeben. Speziell erhalten wir

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) =: F|_a^b = F(x)|_a^b = [F(x)]_a^b.$$

b) Sei $g \in C^1([a, b])$. Dann gilt

$$\int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a).$$

BEWEIS. Lemma 1.9 liefert die Stammfunktion F_0 von f , da f stetig ist. Sei F eine weitere Stammfunktion. Dann verschwindet die Ableitung $(F - F_0)' = f - f = 0$ auf $[a, b]$, sodass nach Satz 5.22 in Analysis 1 die Funktion $F - F_0$ konstant ist, also $F(x) - F_0(x) = F(a) - F_0(a) = F(a)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt. Wir haben damit die Behauptung a) gezeigt, woraus b) mit $f := g'$ und $F := g$ folgt. $\square$

Es sei betont, dass man in vielen Fällen keine ‘geschlossene Formel’ für die Stammfunktion F finden kann. Ein bekanntes und wichtiges Beispiel ist $f(x) =$

e^{-x^2} . Für gewisse Klassen unstetiger Funktionen f oder g' gelten Varianten des Hauptsatzes, die aber deutlich komplizierter sind.

Wir diskutieren einige Beispiele, in denen man eine Stammfunktion direkt angeben kann. Beim Integrieren empfiehlt es sich übrigens besser einen Zwischenschritt mehr aufzuschreiben, da leicht Flüchtigkeitsfehler auftreten. Wir verwenden im Folgenden die in Analysis 1 (samt der Übungen) berechneten Ableitungen meist ohne weitere Kommentare.

BEISPIEL 1.11. a) Wir wollen den Flächeninhalt A zwischen dem Graphen der Funktionen $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = e^x$, und $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = x^2 - \pi x$, bestimmen. Man sieht leicht, dass $f(x) \geq 0 \geq g(x)$ für alle $0 \leq x \leq \pi$ gilt. Wir definieren in dieser Situation $A = \int_0^\pi (f - g) dx$. Der Hauptsatz liefert nun

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi (e^x - x^2 + \pi x) dx = \left[e^x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\pi x^2 \right]_0^\pi = e^\pi - \frac{1}{3}\pi^3 + \frac{1}{2}\pi^3 - (e^0 - 0) \\ &= e^\pi + \frac{1}{6}\pi^3 - 1. \end{aligned}$$

b) Es sei $f(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ für $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ und $f(x) = (\cos x)^{-2}$ für $\frac{1}{2} < x \leq 1$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\cos^2 x} = \arcsin x \Big|_0^{1/2} + \tan x \Big|_{1/2}^1 \\ &= \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 + \tan 1 - \tan \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} + \tan 1 - \tan \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

da $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ nach (4.19) in Analysis 1 gilt.

c) Die Wechselspannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ verrichtet am Widerstand R die momentane Leistung $P(t) = \frac{1}{R} U(t)^2$, wobei $R, U_0, \omega > 0$ Konstanten sind und $t \geq 0$ die Zeit ist. Die Spannung U hat dann die Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$ und die mittlere Leistung ist

$$\bar{P} := \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \approx \frac{1}{T} \sum_{k=1}^n P\left(\frac{kT}{n}\right) \frac{T}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P\left(\frac{kT}{n}\right)$$

Dabei liegen diese Riemann-Summen mit $t_{k,n} = \tau_{k,n} = kT/n$ für große n nahe am Integral, und sie liefern mit dem Faktor $1/T$ einen Mittelwert der Funktionswerte. Um $\bar{P}$ zu berechnen, verwenden wir die Formel

$$\begin{aligned} \cos(2\omega t) &= \cos(\omega t + \omega t) = \cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t) = 1 - 2\sin^2(\omega t), \\ \sin^2(\omega t) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t)) \end{aligned}$$

aus einer Übung in Analysis 1. Nun folgen mit dem Hauptsatz die Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{U_0^2}{RT} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{U_0^2}{2RT} \int_0^T (1 - \cos(2\omega t)) dt \\ &= \frac{U_0^2}{2RT} \left[t - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t) \right]_0^T = \frac{U_0^2}{2RT} \left(T - \frac{\sin(4\pi)}{2\omega} - 0 \right) = \frac{U_0^2}{2R}. \quad \diamond \end{aligned}$$

Wir folgern nun aus dem Hauptsatz die beiden wichtigsten Integrationsregeln, die der Produkt- bzw. der Kettenregel der Differentialrechnung entsprechen.

SATZ 1.12 (Partielle Integration). Für $f, g \in C^1([a, b])$ gilt die Gleichung

$$\int_a^b f'(x)g(x) \, dx = - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx + (fg)\Big|_a^b.$$

BEWEIS. Theorem 1.10 und Satz 5.5 in Analysis 1 implizieren die Identitäten

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b (fg)'(t) \, dt = \int_a^b f'(t)g(t) \, dt + \int_a^b f(t)g'(t) \, dt. \quad \square$$

Wir diskutieren typische Beispiele für die partielle Integration. Dafür muss man einen Faktor im Integranden mit bekannter Stammfunktion und einen mit nicht zu schwieriger Ableitung so identifizieren, dass man das Produkt aus Stammfunktion und Ableitung handhaben kann. Man beachte dabei, dass Polynome und der Logarithmus sich beim Ableiten vereinfachen, während $\exp$, $\sin$ und $\cos$ sich nicht bzw. wenig ändern. Beim Rechnen sollte man sehr auf Vorzeichen achten.

BEISPIEL 1.13. a) Mit $g(x) := x$ und $f'(x) := \sin x$ liefert Satz 1.12

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot (-\cos x) \, dx + x(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 0 - 0 = 1.$$

b) In manchen Fällen hilft es mehrfach partiell zu integrieren, bzw. die rechte mit der linken Seite zu verrechnen. Für $x \in \mathbb{R}$ erhalten wir so mit $f' := \exp$ und $g := \sin$, bzw. $g := \cos$, die Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_0^x e^t \sin t \, dt &= - \int_0^x e^t \cos t \, dt + e^t \sin t \Big|_0^x \\ &= \int_0^x e^t (-\sin t) \, dt - e^t \cos t \Big|_0^x + e^x \sin x - 0, \\ 2 \int_0^x e^t \sin t \, dt &= -(e^x \cos x - 1) + e^x \sin x, \\ \int_0^x e^t \sin t \, dt &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

c) Wenn man nur eine Stammfunktion F sucht, lässt man oft zuerst die Integrationsgrenzen weg und fügt dann beim Auswerten einer Stammfunktion die freie Variable (z.B. x) als obere Grenze ein. Die untere Grenze entspricht nur einer additiven Konstante, die wir hier gleich 0 setzen. Man muss dabei aufpassen, dass das Integrationsintervall im Definitionsbereich des Integranden enthalten ist. Im folgenden Beispiel integriert man in $\mathbb{R}_+$ und wählt $x > 0$, sowie $f' = \mathbb{1}$ und $g = \ln$.

$$\int \ln t \, dt = \int 1 \cdot \ln t \, dt = - \int t \frac{1}{t} \, dt + x \ln x = -x + x \ln x. \quad \diamond$$

Im nächsten Satz liefert partielle Integration die *Integraldarstellung des Taylorestgliedes* (siehe Definition 5.34 in Analysis 1). Diese ist oft angenehmer zu verwenden als die Restgliedformel aus Theorem 5.36 in Analysis 1.

SATZ 1.14. Seien $f \in C^{n+1}((a, b))$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0 \in (a, b)$. Dann gilt

$$f(x) - T_{n,x_0}f(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad \text{für } x \in (a, b).$$

BEWEIS. Wir führen den Beweis induktiv. Für $n = 0$ ist die Behauptung

$$f(x) - T_{0,x_0}f(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

gerade der Hauptsatz Theorem 1.10. Die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und f gehöre zu $C^{n+2}((a, b))$. Daraus und aus Satz 1.12 folgt

$$\begin{aligned} f(x) - T_{n,x_0}f(x) &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \\ &= -\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x \frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t) dt - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \Big|_{t=x_0}^x \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) \end{aligned}$$

für $x \in (a, b)$. Die Behauptung ergibt sich dann aus der Gleichung

$$T_{n+1,x_0}f(x) = T_{n,x_0}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}. \quad \square$$

Wir zeigen die zweite oben angekündigte Integrationsregel.

SATZ 1.15 (Substitutionsregel). Es seien $\phi \in C^1([a, b])$, $J = \phi([a, b])$ und $f \in C(J)$. Dann gilt die Gleichung

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y) dy.$$

BEWEIS. Nach dem Zwischenwertsatz 4.27 in Analysis 1 ist J ein Intervall. Seien $y, y_0 \in J$ und $x \in [a, b]$. Wir wollen aus $f(\phi(x))\phi'(x)$ die Ableitung ‘rausziehen’, um dann den Hauptsatz anzuwenden. Dazu verwenden wir das unbestimmte Integral $F(y) = \int_{y_0}^y f(t) dt$. Da f stetig ist, besitzt F nach Lemma 1.9 die Ableitung f . Die Kettenregel (Satz 5.7 in Analysis 1) liefert dann die Identität

$$(F \circ \phi)'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x), \quad x \in [a, b].$$

Aus Theorem 1.10 und Satz 1.6 schließen wir nun

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) dx &= F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = \int_{y_0}^{\phi(b)} f(y) dy - \int_{y_0}^{\phi(a)} f(y) dy \\ &= \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y) dy. \end{aligned} \quad \square$$

Im folgenden verwenden wir die Substitutionsregel sowohl von links nach rechts (wobei man die Funktionen f , ϕ und ϕ' in den Integranden ‘hineinlesen’ muss und eine Stammfunktion von f benötigt), als auch von rechts nach links (wobei man so ein ϕ finden muss, dass man eine Stammfunktion für $(f \circ \phi)\phi'$ kennt.).

BEISPIEL 1.16. a) Wir wollen $\int_0^2 x e^{-x^2} dx$ berechnen. Partielle Integration versagt hier, da man e^{-x^2} ableiten muss und insgesamt einen ‘schlechteren’ Integranden $-x^3 e^{-x^2}$ erhielte. Man sieht aber, dass x fast die Ableitung von $-x^2$ ist und man kennt die Stammfunktion von $\exp$. Deswegen wählen wir $y = \phi(x) = -x^2$ und $f(y) = e^y$. Es gelten $\phi'(x) = -2x$, $\phi(0) = 0$ und $\phi(2) = -4$. Satz 1.15 liefert

$$\int_0^2 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^2 \phi'(x) f(\phi(x)) dx = -\frac{1}{2} \int_0^{-4} f(y) dy = \frac{1}{2} \int_{-4}^0 e^y dy = \frac{1 - e^{-4}}{2}.$$

b) Sei $\alpha \geq 0$. Das Integral $\int_0^{\pi/2} (\cos x)^\alpha \sin x dx$ könnte man ähnlich wie in Beispiel 1.13 b) mit partieller Integration bestimmen (wenn $\alpha \neq 1$). Es bietet sich aber auch die Substitutionsregel an, da die innere Ableitung von $\cos^\alpha$ gerade $-\sin$ ist und wir die Stammfunktion von y^α kennen. Wir führen hier eine hilfreiche Kurz-Schreibweise ein.

Wir substituieren $y = \phi(x) = \cos x$, sodass $\frac{dy}{dx} = \phi'(x) = -\sin x$ gilt, was wir formal als $\sin x dx = -dy$ schreiben. Weiter sind $y(0) = 1$ und $y(\pi/2) = 0$. Satz 1.15 impliziert dann

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)^\alpha \sin x dx = - \int_1^0 y^\alpha dy = \int_0^1 y^\alpha dy = \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Wenn man nur bis $b \in (0, \pi/2)$ integriert, kann man analog für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ rechnen. Für $b = \pi/2$ lässt mittels der Theorie des Abschnitts 1.3 auch der Fall $\alpha \in (-1, 0)$ wie oben behandeln, obwohl $\cos^\alpha x$ dann für $x \rightarrow \pi/2$ divergiert.

c) Es seien $a < b$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, J das abgeschlossene Intervall mit den Randpunkten $\alpha a + \beta$ und $\alpha b + \beta$, sowie $f \in C(J)$. Mit der *affinen Substitution* $y = \alpha x + \beta$ (die auf $dy = \alpha dx$ führt) folgt die Gleichung

$$\int_a^b f(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} f(y) dy.$$

d) Wir wollen eine Stammfunktion von $\arctan$ berechnen. Hier nutzen wir aus, dass seine Ableitung gleich $(1+t^2)^{-1}$ ist und dass die Einsfunktion $\mathbb{1}$ die Stammfunktion t hat. Das Produkt $t/(1+t^2)$ passt dann zur Substitutionsregel.

Sei $x \in \mathbb{R}$. Partielle Integration (mit $f' := \mathbb{1}$ und $g := \arctan$) liefert zunächst

$$\int_0^x \arctan t dt = \int_0^x 1 \cdot \arctan t dt = - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt + t \arctan t \Big|_0^x.$$

Dann substituieren wir $s = t^2$, wobei $\frac{ds}{dt} = 2t$ (also $t dt = \frac{1}{2} ds$), $s(0) = 0$ und $s(x) = x^2$ gelten, und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^x \arctan t dt &= -\frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{1}{1+s} ds + x \arctan x - 0 \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1+s) \Big|_0^{x^2} + x \arctan x = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \end{aligned}$$

e) Es sei A die Fläche der Kreisscheibe $\overline{B}(0, r)$ in $\mathbb{R}^2$ für ein $r > 0$. Diese ist die Menge aller Punkte $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ mit $s^2 + t^2 \leq r^2$, was äquivalent zu den Relationen $s \in [-r, r]$ und $-\sqrt{r^2 - s^2} \leq t \leq \sqrt{r^2 - s^2}$ ist. Somit gilt

$$A = \int_{-r}^r \left(\sqrt{r^2 - s^2} - (-\sqrt{r^2 - s^2}) \right) ds = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - s^2} ds,$$

vergleiche Beispiel 1.11 a). Um die Substitutionsregel anzuwenden, setzen wir $f(s) = \sqrt{r^2 - s^2}$ für $s \in [-r, r]$ und $s = \phi(x) = r \sin x$ für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dies liefert vielversprechend $f(s) = r\sqrt{1 - \sin^2 x} = r \cos x$ (da hier $\cos x \geq 0$ ist). Es gelten $\frac{ds}{dx} = \phi'(x) = r \cos x$, also $ds = r \cos x dx$, und $\phi([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-r, r]$. Satz 1.15 (von rechts nach links) zeigt dann

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_{-r}^r f(s) ds = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\phi(x)) \phi'(x) dx = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 x} r \cos x dx \\ &= 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x dx = r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2x)) dx \\ &= r^2 \left[x + \frac{1}{2} \sin(2x) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 - (-\frac{\pi}{2} - 0) \right) = \pi r^2. \end{aligned}$$

Ähnlich wie in Beispiel 1.11 haben wir dabei die Formel $2 \cos^2 x = 1 + \cos(2x)$ verwendet. $\diamond$

Im nächsten Beispiel skizzieren wir, wie man für *rationale Funktionen* eine Stammfunktion findet, wenn die Nullstellen des Nennerpolynoms bekannt sind.¹

BEISPIEL 1.17. Es sei $f = p/q$ für reelle, gekürzte Polynome p und $q \neq 0$. Der Koeffizient höchster Ordnung von q sei 1. Die Berechnung einer Stammfunktion von f vollzieht sich in mehreren Schritten.

1) Polynomdivision liefert Polynome r und p_0 mit $\text{grad } p_0 < \text{grad } q$ und $f = r + \frac{p_0}{q}$. (Siehe Satz I.8.15 in [1], $\text{grad } q$ ist die höchste vorkommende Potenz.) Es folgt

$$\int f = \int r + \int \frac{p_0}{q},$$

und die Stammfunktion von r kennen wir.

2) Gemäß des Fundamentalsatzes der Algebra (siehe die Abschnitte 4.2 und 7.6 in [5]) gibt es eindeutig bestimmte $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ und $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ derart, dass $q(x) = (x - z_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - z_n)^{m_n}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, wobei $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$ ist.

3) Die komplexe *Partialbruchzerlegung* liefert solche eindeutig bestimmte Zahlen $c_{jk} \in \mathbb{C}$, dass

$$\frac{p_0(x)}{q(x)} = \frac{c_{11}}{x - z_1} + \dots + \frac{c_{1m_1}}{(x - z_1)^{m_1}} + \dots + \frac{c_{n1}}{x - z_n} + \dots + \frac{c_{nm_n}}{(x - z_n)^{m_n}} \quad (1.3)$$

¹Hier wie auch sonst sind die Literaturverweise nur Zusatzinformationen, um die Korrektheit der Aussagen zu belegen. Sie werden im Rest der Vorlesung nicht benötigt.

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ gilt. Dabei ist c_{jk} reell, wenn z_j es ist. Falls $z_j \notin \mathbb{R}$, gibt es einen Index l mit $z_l = \bar{z}_j$ und $c_{lk} = \overline{c_{jk}}$. (Siehe Satz VI.5.8 und Bemerkung VI.5.10 in [2].)

4) a) Wenn z_j und damit c_{jk} reell sind, kann der entsprechende Summand in (1.3) integriert werden.

b) Sei $z_j = z = \alpha + i\beta \notin \mathbb{R}$ und $c_{j1} = c = a + ib \notin \mathbb{R}$ für $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\frac{c}{x-z} + \frac{\bar{c}}{x-\bar{z}} = \frac{cx - c\bar{z} + \bar{c}x - \bar{c}z}{x^2 - (z + \bar{z})x + |z|^2} = \frac{2ax - 2(\alpha a + \beta b)}{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2}.$$

(Der Nenner wird bei $x_0 = \alpha$ minimal und ist somit größer gleich $\beta^2 > 0$.) Der reelle Bruch kann integriert werden, siehe die Übungen.

c) Der komplexe Fall mit Potenz $k > 1$ wird hier nicht behandelt. (Siehe Bemerkung VI.5.10 in [2].)

Als Beispiel behandeln wir $f : \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = ((x - \alpha)(x - \beta))^{-1}$ für feste Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq \beta$. Dabei zeigen wir eine Möglichkeit, wie man die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung hier (im einfachsten Fall) berechnet. Nach (1.3) gibt es Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{c_1}{x - \alpha} + \frac{c_2}{x - \beta}.$$

Wir multiplizieren mit dem Nenner und erhalten

$$1 = c_1(x - \beta) + c_2(x - \alpha), \quad (1.4)$$

sogar für alle $x \in \mathbb{R}$ nach stetiger Fortsetzung. Wenn wir hier $x = \alpha$ und $x = \beta$ einsetzen, ergeben sich $1 = c_1(\alpha - \beta)$ und $1 = c_2(\beta - \alpha)$. Daraus folgt

$$f(x) = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x - \beta} \right).$$

(Alternativ liefert ein Koeffizientenvergleich in (1.4) die Gleichungen $c_1 + c_2 = 0$ und $c_1\beta + c_2\alpha = -1$, vergleiche Korollar 5.33 in Analysis 1.) Wir berechnen damit

$$\begin{aligned} \int f(t) dt &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\int \frac{dt}{t - \alpha} - \int \frac{dt}{t - \beta} \right) = \frac{1}{\alpha - \beta} (\ln |x - \alpha| - \ln |x - \beta|) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \ln \left| \frac{x - \alpha}{x - \beta} \right|. \end{aligned}$$

Damit kann man nun $\int_a^b f(t) dt$ bestimmen, wenn α und β nicht in $[a, b]$ liegen. $\diamond$

Ferner erlaubt es der Hauptsatz Potenzreihen gliedweise zu integrieren.

SATZ 1.18. Sei $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann hat $F(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ den Konvergenzradius ρ . Weiter ist $F : (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto F(x)$, die Stammfunktion von $f : (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x)$, mit $F(0) = 0$.

BEWEIS. Der erste Behauptung zeigt man wie im Beweis von Korollar 5.32 in Analysis 1. Dieses Korollar impliziert auch, dass F die Ableitung $F' = f$ hat. $\square$

Wir können nun die Potenzreihe einer weiteren klassischen Funktion bestimmen.

BEISPIEL 1.19. Beispiele 5.13 und 3.2 aus Analysis 1 implizieren die Gleichungen

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

für alle $x \in (-1, 1)$. Aus Satz 1.18 und $\arctan 0 = 0$ folgern wir dann die Reihendarstellung

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{für } x \in (-1, 1). \quad \diamond$$

Abschließend wollen wir Integral und Grenzwerte vertauschen. Das nächste Beispiel zeigt, dass dies nicht ohne weiteres möglich ist.

BEISPIEL 1.20. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wir definieren $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$;

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2 x, & \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n}, \\ 0, & \frac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Dann konvergiert (f_n) punktweise gegen $f = 0$ für $n \rightarrow \infty$. Es gilt natürlich $\int_0^1 f(x) dx = 0$. Mit der Substitution $y = \frac{2}{n} - x$ erhalten wir andererseits

$$\int_0^1 f_n(x) dx = n^2 \int_0^{1/n} x dx + n^2 \int_{1/n}^{2/n} \left(\frac{2}{n} - x\right) dx = 2n^2 \int_0^{1/n} x dx = 1 \not\rightarrow 0. \quad \diamond$$

Im Falle gleichmäßiger Konvergenz (siehe Definition 4.38 in Analysis 1) erhält man jedoch einen einfachen Grenzwertsatz. Wir vertiefen dieses Thema in Analysis 3.

SATZ 1.21. Es seien $f_n, f \in PC([a, b])$ für $n \in \mathbb{N}$ und (f_n) konvergiere gleichmäßig für $n \rightarrow \infty$ gegen f . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

BEWEIS. Satz 1.6 und die Annahme liefern für $n \rightarrow \infty$ den gewünschten Limes

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f(x) - f_n(x)) dx \right| \leq (b-a) \|f - f_n\|_{\infty} \rightarrow 0. \quad \square$$

Der gleichmäßige Limes f einer Folge in $PC([a, b])$ muss nicht notwendig in $PC([a, b])$ liegen, da f unendlich viele Sprungstellen besitzen kann.

1.3. Uneigentliche Riemann-Integrale

Wir erweitern nun den Begriff des Integrals auf beliebige Integrationsintervalle I , wobei wir uns auf Beispiele konzentrieren. Die Grundidee ist es, zunächst auf Teilintervallen $[\alpha, \beta]$ zu integrieren und dann zu prüfen, ob diese Integrale für $\beta \rightarrow \sup I$ bzw. $\alpha \rightarrow \inf I$ konvergieren.

DEFINITION 1.22. a) Es seien $-\infty < a < b \leq +\infty$ und $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass die Einschränkung $f|_{[a, \beta]}$ für jedes $\beta \in (a, b)$ zu $PC([a, \beta])$ gehört. Falls der Grenzwert

$$\lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(x) dx =: \int_a^b f(x) dx$$

in $\mathbb{R}$ existiert, heißt f uneigentlich (Riemann-)integrierbar auf $[a, b)$. Entsprechend wird das Intervall $(a, b]$ für $-\infty \leq a < b < +\infty$ behandelt.

b) Es seien $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und $f \in (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass die Einschränkung $f|_{[\alpha, \beta]}$ für alle $a < \alpha < \beta < b$ zu $PC([\alpha, \beta])$ gehört. Wähle $c \in (a, b)$. Wenn $f|_{(a, c]}$ und $f|_{[c, b)}$ uneigentlich integrierbar sind, dann heißt f uneigentlich (Riemann-)integrierbar auf (a, b) und man setzt

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Wir notieren grundlegende Eigenschaften dieser Begriffe.

BEMERKUNG 1.23. a) Definition 1.22 b) hängt nicht von der Wahl der Zwischenstelle $c \in (a, b)$ ab. Um dies einzusehen, seien etwa $a < \alpha < c < d < \beta < b$ gegeben. Dann liefert Satz 1.6 die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_\alpha^c f(x) dx + \int_c^\beta f(x) dx &= \int_\alpha^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^\beta f(x) dx \\ &= \int_\alpha^d f(x) dx + \int_d^\beta f(x) dx. \end{aligned}$$

Die Grenzwerte für $\alpha \rightarrow a$ (bzw. $\beta \rightarrow b$) auf der linken und rechten Seite sind dann gleichwertig und liefern den gleichen Limes.

b) Die Aussagen von Satz 1.6 b), c), d) und e) gelten entsprechend für uneigentlich integrierbare Funktionen f , g und $|f|$ (bis auf die zweite Ungleichung in e)). Satz 1.6 liefert diese Eigenschaften zuerst etwa auf dem Intervall $[a, \beta]$, woraus die Aussagen auf $[a, b)$ mittels der Rechenregeln für den Grenzwert $\beta \rightarrow b$ folgen. Bezüglich $|f|$ verweisen wir auch auf Satz 1.25 und Beispiel 1.26.

c) Seien etwa $-\infty < a < c < d < b \leq +\infty$ und $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f|_{[a, \beta]} \in PC([a, \beta])$ für jedes $\beta \in (a, b)$. Mittels Satz 1.6 folgt

$$\int_a^d f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx \geq \int_a^c f(x) dx.$$

Für $f \geq 0$ oder $f \leq 0$ ist also die Konvergenz in Definition 1.22 a) monoton. $\diamond$

Wir beginnen mit einigen einfachen (aber zentralen) Beispielen, bei denen man die uneigentliche Integrale direkt ausrechnen kann. In Teil b) sieht man, wie schnell eine positive Funktion f bei ∞ fallen muss, um uneigentlich integrierbar zu sein, und dass dies im Falle einer Singularität von f bei z.B. $a \in \mathbb{R}$ gerade umgekehrt ist. Den Effekt von Vorzeichenwechsel der Integranden illustrieren wir in Beispiel 1.26.

BEISPIEL 1.24. a) Sei $\alpha > 0$. Es existiert $\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$, da

$$\int_0^b e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^b = \frac{1 - e^{-\alpha b}}{\alpha} \longrightarrow \frac{1}{\alpha}, \quad b \rightarrow \infty.$$

b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Genau für $\alpha < 1$ existiert $\int_0^1 x^{-\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha}$. Genau für $\alpha > 1$ existiert $\int_1^\infty x^{-\alpha} dx = \frac{1}{\alpha-1}$. Somit existiert $\int_0^\infty x^{-\alpha} dx$ für **kein** $\alpha \in \mathbb{R}$.

BEWEIS. Für $b > a > 0$ berechnen wir

$$\int_a^b x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_a^b = \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}), & \alpha \neq 1, \\ \ln x \Big|_a^b = \ln b - \ln a, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Seien $b = 1$ und $a \rightarrow 0^+$. Dann konvergiert das obige Integral genau für $\alpha < 1$ und dann gegen $\frac{1}{1-\alpha}$. Seien $a = 1$ und $b \rightarrow \infty$. Nun konvergiert das Integral genau für $\alpha > 1$ und zwar gegen $\frac{1}{\alpha-1}$. $\square$

c) Das Integral $\int_0^\infty \sin x dx$ existiert nicht, da etwa die Folge

$$\int_0^{k\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{k\pi} = 1 - \cos(k\pi) = \begin{cases} 0, & k \in \mathbb{N} \text{ gerade,} \\ 2, & k \in \mathbb{N} \text{ ungerade,} \end{cases}$$

für $k \rightarrow \infty$ divergiert.

d) Es existiert $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$. Dazu beachte man, dass

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^b = \arcsin b \longrightarrow \frac{\pi}{2}$$

für $b \rightarrow 1$ konvergiert. Ähnlich zeigt man die Gleichung $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi/2$.

e) Für $b \in (0, \frac{\pi}{2})$ konvergiert $\int_{-b}^b \tan x dx = -\ln(\cos b) + \ln(\cos(-b)) = 0$ für $b \rightarrow \frac{\pi}{2}$, obwohl $\int_0^b \tan x dx = \ln(\cos b)$ für $b \rightarrow \frac{\pi}{2}$ divergiert. Es ist also wichtig, in Definition 1.22 b) die Integrationsgrenzen getrennt zu betrachten. $\diamond$

Die Existenz uneigentlicher Integrale wird oft durch das *Majorantenkriterium für Integrale* gesichert. Es ist samt Beweis analog zu dem für Reihen aus Analysis 1.

SATZ 1.25. Seien $-\infty < a < b \leq +\infty$ und $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f, g \in PC([a, c])$ für alle $c \in (a, b)$.

a) Es gelte $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b)$ und g sei auf $[a, b)$ uneigentlich integrierbar. Dann sind f und $|f|$ auf $[a, b)$ uneigentlich integrierbar und erfüllen

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

b) Es gelte $f(x) \geq g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b)$ und g sei auf $[a, b)$ nicht uneigentlich integrierbar. Dann ist auch f auf $[a, b)$ nicht uneigentlich integrierbar. Entsprechende Aussagen erhält man für Intervalle $(a, b]$ und (a, b) .

BEWEIS. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 4.5 und Bemerkung 4.7 in Analysis 1 gibt es so eine Zahl $c_\varepsilon \in (a, b)$, dass für alle $c_\varepsilon \leq c < d < b$ die Ungleichungen

$$\varepsilon \geq \int_a^b g(x) dx - \int_a^c g(x) dx \geq \int_a^d g(x) dx - \int_a^c g(x) dx = \int_c^d g(x) dx \geq 0$$

gelten, wobei wir auch Bemerkung 1.23 c) und Satz 1.6 verwendet haben. Daraus und aus der Annahme folgt wieder mit diesem Satz die Abschätzung

$$0 \leq \left| \int_a^d f(x) dx - \int_a^c f(x) dx \right| = \left| \int_c^d f(x) dx \right| \leq \int_c^d |f(x)| dx \leq \int_c^d g(x) dx \leq \varepsilon.$$

Seien nun $\beta_n \in [a, b]$ mit $\beta_n \rightarrow b$ für $n \rightarrow \infty$ gewählt. Wegen der abgesetzten Ungleichung ist $(\int_a^{\beta_n} f(x) dx)_n$ eine Cauchyfolge und hat also einen Grenzwert J . Es konvergiere auch $\beta'_n \rightarrow b^-$. Wir erhalten ebenso den Limes J' von $(\int_a^{\beta'_n} f(x) dx)_n$. Die abgesetzte Ungleichung impliziert dann

$$|J - J'| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^{\beta_n} f(x) dx - \int_a^{\beta'_n} f(x) dx \right| \leq \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\beta_n, \beta'_n \geq c_\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir $J = J'$, sodass das Integral $\int_a^b f(x) dx = J$ existiert.

Genauso zeigt man die uneigentliche Integrierbarkeit von $|f|$. Mit Satz 1.6 schließen wir weiter

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \lim_{\beta \rightarrow b^-} \left| \int_a^\beta f(x) dx \right| \leq \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta |f(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Teil b) folgt per Negation. Die Fälle $(a, b]$ und (a, b) behandelt man analog. $\square$

Wir kombinieren wir nun das Majorantenkriterium mit Beispiel 1.24. In Teil b) wird dabei das Vorgehen mit Hilfe partieller Integration verfeinert. Diese Techniken sind von großer Bedeutung für die weitere Entwicklung der Analysis.

BEISPIEL 1.26. a) Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^\alpha e^{-x}$. Auf $(0, 1]$ liegt e^{-x} in $[\frac{1}{e}, 1]$ und sollte deswegen keine Rolle für die Existenz des Integrals spielen. Bei ∞ sollte e^{-x} jedoch die Potenzfunktion dominieren. Wir behaupten demgemäß, dass f genau für $\alpha > -1$ uneigentlich integrierbar ist.

BEWEIS. 1) Sei $\alpha \leq -1$. Es gilt $f(x) \geq x^\alpha/e =: g(x)$ für alle $x \in (0, 1]$. Nach Beispiel 1.24 ist g auf $(0, 1]$ nicht uneigentlich integrierbar, sodass dies gemäß Satz 1.25 auch für f folgt.

2) Sei $\alpha > -1$. Für $x \in (0, 1]$ ist $f(x)$ kleiner gleich x^α , und damit ist f nach Beispiel 1.24 und Satz 1.25 auf $(0, 1]$ uneigentlich integrierbar.

Wir betrachten nun $x \geq 1$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \alpha$. Dann gilt $x^\alpha \leq x^n$. Eine Variante von Beispiel 5.29 in Analysis 1 zeigt, dass die Funktion $\varphi(x) = x^n e^{-x/2}$ für $x \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt. Wie in einer Übung aus Analysis 1 liefert der Satz vom Maximum, dass φ auf $[1, \infty)$ durch eine Konstante $c > 0$ beschränkt ist. Somit gilt die Abschätzung

$$0 \leq f(x) = x^n e^{-x/2} e^{-x/2} \leq c e^{-x/2}$$

für $x \geq 1$. Da die rechte Seite laut Beispiel 1.24 auf $[1, \infty)$ uneigentlich integrierbar ist, liefert Satz 1.25 die Behauptung. $\square$

b) Es sei $\alpha > 0$ und $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{\sin(x)}{x^\alpha}$. Dann ist f uneigentlich integrierbar. (Für $\alpha = 0$ ist dies laut Beispiel 1.24 c) falsch.)

BEWEIS. Die schlichte Abschätzung $|f(x)| \leq x^{-\alpha}$ führt nur für $\alpha > 1$ zum Ziel, siehe Beispiel 1.24. Wir müssen stattdessen den Vorzeichenwechsel durch den Sinus ausnutzen. Dies geschieht indirekt durch eine partielle Integration. Die Stammfunktion $-\cos$ von $\sin$ ist beschränkt (das beruht auf dem Vorzeichenwechsel), und wir gewinnen die entscheidende Potenz, indem wir $x^{-\alpha}$ ableiten. Wir berechnen somit

$$\begin{aligned} \int_1^b f(x) dx &= \int_1^b x^{-\alpha} \sin x dx = - \int_1^b (-\alpha) x^{-\alpha-1} (-\cos x) dx + x^{-\alpha} (-\cos x) \Big|_1^b \\ &= -\alpha \int_1^b x^{-\alpha-1} \cos x dx + \cos 1 - b^{-\alpha} \cos b \end{aligned}$$

für $b > 1$ mittels Satz 1.12. Der letzte Integrand ist im Betrag kleiner gleich der (nach Beispiel 1.24) uneigentlich integrierbaren Funktion $g(x) = x^{-\alpha-1}$ auf $[1, \infty)$. Satz 1.25 sichert also für das letzten Integral die Existenz des Limes für $b \rightarrow \infty$. Der letzte Term ist im Betrag durch $b^{-\alpha}$ beschränkt und strebt somit gegen 0. $\square$

c) Die Funktion $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{|\sin(x)|}{x}$ ist **nicht** uneigentlich integrierbar. (Das zeigt klar die Bedeutung des Vorzeichenwechsels in Teil b).)

BEWEIS. Aus Satz 4.49 und (4.19) in Analysis 1 folgt, dass $|\sin|$ π -periodisch ist und $\sin t \geq 1/\sqrt{2}$ für $t \in [\pi/4, 3\pi/4]$ gilt. So ergibt sich die untere Schranke

$$f(x) \geq \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}x} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\pi(k+\frac{3}{4})}, & \pi(k+\frac{1}{4}) \leq x \leq \pi(k+\frac{3}{4}), \quad k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $x \geq 1$. Da $f \geq 0$ ist, erhalten wir

$$\int_1^{\pi(n+\frac{3}{4})} f(x) dx \geq \sum_{k=1}^n \int_{\pi(k+\frac{1}{4})}^{\pi(k+\frac{3}{4})} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\pi(k+\frac{3}{4})} dx = \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{2\sqrt{2}\pi(k+\frac{3}{4})} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{4\sqrt{2}k}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Nach Beispiel 3.2 aus Analysis 1 wächst die rechte Reihe für $n \rightarrow \infty$ gegen ∞ , woraus die Behauptung folgt. $\square$

Man kann (uneigentliche) Integrale auch verwenden, um die Konvergenz von Reihen nachzuweisen.

BEISPIEL 1.27. Es sei $\alpha > 1$ und $s_n = \sum_{k=1}^n k^{-\alpha}$ für $n \in \mathbb{N}$. Da $k^{-\alpha} \leq x^{-\alpha}$ für $x \in [k-1, k]$ gilt, folgern wir aus Satz 1.6 und Beispiel 1.24 die Ungleichungen

$$s_n = 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k k^{-\alpha} dx \leq 1 + \int_1^n x^{-\alpha} dx \leq 1 + \int_1^\infty x^{-\alpha} dx = 1 + \frac{1}{\alpha-1},$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Also ist $(s_n)_n$ beschränkt, und somit existiert $\sum_{k=1}^\infty k^{-\alpha}$ nach Satz 3.4 in Analysis 1. (Vergleiche Beispiel 3.13 in Analysis 1.) $\diamond$

Die wichtige *Gammafunktion* wird durch ein parameterabhängiges uneigentliches Integral definiert. Sie ist ein kontinuierliches Analogon der Fakultät.

BEISPIEL 1.28. Sei $x > 0$. Nach Beispiel 1.26 existiert

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Dabei gelten $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ und $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

BEWEIS. Partielle Integration impliziert die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \lim_{a \rightarrow 0^+, b \rightarrow \infty} \int_a^b t^x e^{-t} dt = \lim_{a \rightarrow 0^+, b \rightarrow \infty} \left(- \int_a^b x t^{x-1} (-e^{-t}) dt + t^x (-e^{-t}) \Big|_{t=a}^b \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+, b \rightarrow \infty} \left(x \int_a^b t^{x-1} e^{-t} dt + a^x e^{-a} - b^x e^{-b} \right) \\ &= x\Gamma(x), \end{aligned}$$

wobei die Limiten $a \rightarrow 0^+$ und $b \rightarrow \infty$ getrennt betrachtet werden. Wie im Beweis von Beispiel 1.26 a) sehen wir dabei, dass $b^x e^{-b}$ für $b \rightarrow \infty$ verschwindet. Wegen $\Gamma(1) = 1$ laut Beispiel 1.24, folgt die zweite Behauptung dann per Induktion. $\square$

1.4. Skalare Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir diskutieren nun eine Anwendung der Integralrechnung auf einfache Differentialgleichungen, mit denen etwa Wachstumsprozesse einer einzelnen Spezies beschrieben werden. Die Interaktion mehrerer Spezies oder z.B. Schwingungsgleichungen (bei denen auch zweite Ableitungen auftreten) können mit dem folgenden Ansatz nicht behandelt werden. Im letzten Kapitel diskutieren wir manche solcher Probleme ein wenig und führen in die dafür nötige Theorie ein.

BEISPIEL 1.29. Es soll ein Anfangskapital $u_0 > 0$ zu einem Zinssatz $a > 0$ (für eine Zeiteinheit) für einen Zeitraum $t > 0$ so angelegt werden, dass zu dem Zeitpunkten $k \frac{t}{n}$ für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ und einem $n \in \mathbb{N}$ die Zinsen für den Zeitraum $[(k-1)\frac{t}{n}, k\frac{t}{n}]$ dem Kapital hinzugefügt werden. Es sei u_k das Kapital zur Zeit kt/n . Dann gelten

$$u_1 = u_0 + \frac{at}{n} u_0 = (1 + \frac{at}{n}) u_0, \quad u_2 = u_1 + \frac{at}{n} u_1 = (1 + \frac{at}{n})^2 u_0, \quad \dots$$

Induktiv sieht man, dass das Kapital zur Zeit t durch $u_n = (1 + \frac{at}{n})^n u_0$ gegeben ist. Gemäß einer Übung in Analysis 1 (siehe auch Beispiel 2.16 dort) konvergiert die Folge (u_n) für $n \rightarrow \infty$ gegen $u(t) = e^{at} u_0$, was das Kapital zur Zeit t bei ‘instantaner’ Verzinsung angibt.

Dabei ist $t \mapsto e^{at} u_0$ die einzige Lösung in $C^1(\mathbb{R}_{\geq 0})$ des ‘Anfangswertproblems’

$$u'(t) = au(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0. \quad (1.5)$$

BEWEIS. Es ist nur die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei dazu $v \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0})$ eine weitere Lösung von (1.5). Sei $t > 0$. Setze $w(s) = e^{(t-s)a} v(s)$ für $s \in [0, t]$. Diese

Funktion hat die Ableitung

$$w'(s) = e^{(t-s)a}(-a)v(s) + e^{(t-s)a}v'(s) = 0, \quad s \in [0, t],$$

da $v'(s) = av(s)$ gilt. Nach Satz 5.22 aus Analysis 1 ist w konstant, sodass die Behauptung $v(t) = w(t) = w(0) = e^{ta}u_0$ aus $v(0) = u_0$ folgt. $\square$

Es sei $u(t)$ die Größe einer Spezies zur Zeit $t \geq 0$ mit Anfangsgröße $u_0 > 0$ für $t = 0$. Dann ist die relative momentane Änderung von $u(t)$ durch $\frac{u'(t)}{u(t)}$ gegeben. In (1.5) ist dieser Bruch konstant gleich a , was für $a > 0$ zu unbeschränktem und sehr schnellem Wachstum führt. Dies ist z.B. bei biologischen Modellen offenbar Unfug. Verhulst hat 1837 das folgende Modell gedämpften Wachstums vorgeschlagen.

BEISPIEL 1.30. Die Größe $u(t)$ besitze die relative momentane Änderung $\frac{u'(t)}{u(t)} = \lambda\left(1 - \frac{u(t)}{u_\infty}\right)$ für alle $t \geq 0$ und gegebene Konstanten $\lambda, u_\infty, u_0 > 0$. Daraus erhalten wir das Anfangswertproblem

$$u'(t) = \lambda\left(1 - \frac{u(t)}{u_\infty}\right)u(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0. \quad (1.6)$$

Man beachte, dass für $u_0 = 0$ bzw. $u_0 = u_\infty$ die konstanten Funktionen $u = 0$ bzw. $u = u_\infty$ das Problem (1.6) lösen. Sei nun $u_0 > 0$ mit $u_0 \neq u_\infty$. Wir nehmen an, dass es eine Lösung $u \in C^1([0, b])$ von (1.6) gebe. Mittels Satz 4.15 in Analysis 1 finden wir dann so eine Zeit $t_1 > 0$, dass $u(t) > 0$ und $u(t) \neq u_\infty$ für alle $t \in [0, t_1]$ gelten. Aus (1.6) folgt dann für alle $s \in [0, t_1]$ die Identität

$$\frac{u'(s)}{(u_\infty - u(s))u(s)} = \frac{\lambda}{u_\infty}.$$

Wir integrieren nun über $s \in [0, t]$ mit $t \leq t_1$ und substituieren $x = u(s)$. Mit Beispiel 1.17 erhalten wir dann die Gleichungen

$$\begin{aligned} t \frac{\lambda}{u_\infty} &= \int_0^t \frac{u'(s)}{(u_\infty - u(s))u(s)} ds = - \int_{u_0}^{u(t)} \frac{dx}{x(x - u_\infty)} = \frac{1}{u_\infty} \ln \frac{|x|}{|x - u_\infty|} \Big|_{u_0}^{u(t)}, \\ \ln \frac{u(t)}{|u(t) - u_\infty|} &= \lambda t + \ln \frac{u_0}{|u_0 - u_\infty|}, \\ \frac{u(t)}{|u(t) - u_\infty|} &= \frac{u_0}{|u_0 - u_\infty|} e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Da $u([0, t_1])$ ein Intervall ist, das u_∞ nicht enthält, sind entweder $u(t)$ und $u(0) = u_0$ beide größer als u_∞ oder beide kleiner als u_∞ . Somit können wir in der obigen Formel die Beträge weglassen. Mittels einer Rechnung ergibt sich dann die Identität

$$u(t) = \frac{u_0 u_\infty}{u_0 + (u_\infty - u_0)e^{-\lambda t}}.$$

Eine Probe zeigt, dass diese Funktion das Problem (1.6) für alle $t \geq 0$ löst. Weiter konvergiert $u(t) \rightarrow u_\infty$ für $t \rightarrow \infty$ exponentiell. $\diamond$

Ähnlich behandeln wir nun ein allgemeineres Problem. Es seien $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f \in C((a, b))$, $g \in C(\mathbb{R}_{\geq 0})$ und $u_0 \in (a, b)$ gegeben. Wir suchen eine Endzeit $\bar{t} \in (0, \infty]$ und eine Lösung $u \in C^1([0, \bar{t}))$ mit $u(t) \in (a, b)$ für $t \in [0, \bar{t})$ und

$$u'(t) = g(t)f(u(t)), \quad t \in [0, \bar{t}), \quad u(0) = u_0. \quad (1.7)$$

Zuerst bemerken wir, dass die konstante Funktion $u = u_0$ im Falle $f(u_0) = 0$ das Problem (1.7) löst. (Es kann noch mehr Lösungen geben, siehe Beispiel 1.32 c.)

Sei also im Folgenden $f(u_0) \neq 0$. Da f stetig ist, gilt $f(x) \neq 0$ für $x \in (u_0 - \delta, u_0 + \delta) \subseteq (a, b)$ und ein $\delta > 0$. Sei I das größte Intervall in (a, b) , das u_0 und keine Nullstelle von f enthält. Wir definieren nun

$$H : I \rightarrow \mathbb{R}; \quad H(y) = \int_{u_0}^y \frac{dx}{f(x)}, \quad G : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}; \quad G(t) = \int_0^t g(s) ds.$$

Da $f(I)$ ein Intervall ist (siehe Korollar 4.29 in Analysis 1), haben wir entweder $f(x) > 0$ für alle $x \in I$ oder $f(x) < 0$ für alle $x \in I$. Gemäß des Hauptsatzes ist weiter $H'(x) = 1/f(x)$. Satz 5.22 in Analysis 1 impliziert also, dass H auf I strikt wächst oder strikt fällt. Insbesondere existiert die Umkehrfunktion $H^{-1} : J := H(I) \rightarrow I$. Hierbei ist J ein Intervall mit $0 = H(u_0) \in J$, und 0 ist wegen der strikten Monotonie kein Randpunkt von J . Da ferner $G(0) = 0$ und G stetig ist, gibt es Zeiten $t > 0$ mit $G([0, t]) \subseteq J$. Damit gilt auch $G([0, \bar{t})) \subseteq J$ für das Supremum $\bar{t} \in (0, \infty]$ dieser t .

Das Vorgehen in Beispiel 1.30 heißt *Trennung der Variablen*. Der folgende Satz beschreibt die Aussagen, die man damit gewinnen kann.

SATZ 1.31. *Unter den obigen Voraussetzungen (insbesondere $f(u_0) \neq 0$) und Bezeichnungen löst $u = H^{-1} \circ G \in C^1([0, \bar{t}))$ das Problem (1.7). Dabei gilt*

$$H(u(t)) = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{dx}{f(x)} = \int_0^t g(s) ds = G(t), \quad 0 \leq t < \bar{t}. \quad (1.8)$$

Sei auch $v \in C^1([0, t_1))$ ein Lösung von (1.7) für eine Zeit $t_1 > 0$. Setze $\bar{t}_1 = \min\{t_1, \bar{t}\}$. Für alle $t \in [0, \bar{t}_1)$ gilt dann $f(v(t)) \neq 0$ und $u(t) = v(t)$. Also ist u die einzige Lösung von (1.7) auf $[0, \bar{t})$.

BEWEIS. 1) Für $u = H^{-1} \circ G$ liefern Ketten- und Umkehrregel und der Hauptsatz

$$u'(t) = (H^{-1})'(G(t))G'(t) = \frac{g(t)}{H'(u(t))} = g(t)f(u(t))$$

für $t \in [0, \bar{t})$. Weiter gilt $u(0) = H^{-1}(0) = u_0$.

2) Sei v wie in der Behauptung. Da $f(v(0)) \neq 0$ und $f \circ v$ stetig ist, gibt es eine Zeit $t_0 \in [0, t_1)$ mit $f(v(s)) \neq 0$ für alle $s \in [0, t_0]$ (also ist $v(s) \in I$). Sei $0 \leq s \leq t \leq t_0$. Wie in Beispiel 1.30 erhalten wir $g(s) = v'(s)/f(v(s))$ für $0 \leq s \leq t < \bar{t}_1$. Mit Integration und der Substitution $x = v(s)$ folgern wir

$$G(t) = \int_0^t g(s) ds = \int_0^t \frac{v'(s)}{f(v(s))} ds = \int_{u_0}^{v(t)} \frac{dx}{f(x)} = H(v(t)),$$

wobei auch $v(0) = u_0$ eingeht. Wegen $v(t) \in I$ liegt $G(t)$ in J , sodass $t_0 < \bar{t}$ und $v(t) = u(t)$ folgen. Mittels Supremum über solche t_0 ergibt sich die Behauptung. $\square$

Wir besprechen noch das Verhalten der Lösung u im Falle $\bar{t} < \infty$ und $(a, b) = \mathbb{R}$. Dann konvergiert zumindest eine Folge $(G(t_n))$ für $t_n \rightarrow \bar{t}$ gegen einen Randpunkt y_0 von J oder gegen $\pm\infty$ (wenn J unbeschränkt ist). Somit strebt $u(t_n) = H^{-1}(G(t_n))$ gegen einen Randpunkt x_0 von I oder gegen $\pm\infty$ bzw. $\mp\infty$. Im letzten Fall ‘explodiert’ u in endlicher Zeit, siehe Beispiel 1.32 a). Im ersten Fall gilt $f(x_0) = 0$. Hier ist es möglich, dass u zwar als Lösung fortgesetzt werden kann, aber dabei die Eindeutigkeit verliert, siehe Beispiel 1.32 c). Vergleiche auch Abschnitt 5.2.

Mit (1.8) haben wir eine (nützliche) implizite Gleichung für die Lösung gezeigt. Für eine explizite Formel muss man die Integrale (vor allem H) berechnen und H invertieren. Wir diskutieren einfache Beispiele, in denen das gelingt und die die eben angedeuteten Phänomene illustrieren.

BEISPIEL 1.32. a) Sei $u_0 > 0$. Die Funktion $u(t) = \left(\frac{1}{u_0} - t\right)^{-1}$ mit $0 \leq t < \frac{1}{u_0} = \bar{t}$ ist die einzige Lösung von

$$u'(t) = u(t)^2, \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0, \quad (1.9)$$

auf $[0, \bar{t})$. Hier gilt $u(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \bar{t}^-$.

BEWEIS. Wir berechnen zuerst mit der Methode der Trennung der Variablen die Lösungsformel, bevor wir Satz 1.31 selbst anwenden, um die Eindeutigkeit und $\frac{1}{u_0} = \bar{t}$ zu zeigen.

Hier gelten $g(t) = 1$ und $f(x) = x^2$. Sei $u \in C^1([0, t_1])$ eine Lösung mit $u(t) > 0$ für $t \in [0, t_1]$. Nach (1.8) gilt dann

$$t = G(t) = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{u_0}^{u(t)} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u(t)},$$

$$u(t) = \left(\frac{1}{u_0} - t\right)^{-1}$$

für $0 \leq t \leq t_1$. Man sieht nun direkt (mittels einer Probe), dass diese Funktion (1.9) auf $[0, 1/u_0)$ löst.

Wegen $u_0 > 0$, ist $I = \mathbb{R}_+$ in Satz 1.31. Weiter liefert die obige Rechnung $H : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$; $H(y) = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{y}$, woraus $J = H(\mathbb{R}_+) = (-\infty, \frac{1}{u_0})$ und somit $\frac{1}{u_0} = \bar{t}$ folgen. Satz 1.31 liefert nun die Behauptung. $\square$

b) Es sei $a \in C(\mathbb{R}_{\geq 0})$ und $u_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist $u(t) = \exp(\int_0^t a(s) ds) u_0$ die einzige Lösung auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ von

$$u'(t) = a(t)u(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0. \quad (1.10)$$

BEWEIS. Wir haben $f(x) = x$ und $g(t) = a(t)$. Sei z.B. $u_0 > 0$. Wieder ist $I = \mathbb{R}_+$. Wir berechnen

$$H : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}; \quad H(y) = \int_{u_0}^y \frac{dx}{x} = \ln y - \ln u_0,$$

sodass sich $H(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$ ergibt. Also ist $\bar{t} = \infty$ und Satz 1.31 liefert die eindeutige Lösung u auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ von (1.10) durch

$$\int_0^t a(s) \, ds = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{dx}{x} = \ln u(t) - \ln u_0,$$

$$u(t) = \exp \left(\ln u_0 + \int_0^t a(s) \, ds \right) = \exp \left(\int_0^t a(s) \, ds \right) u_0.$$

Den Fall $u_0 < 0$ behandelt man wie $u_0 > 0$. (Man sieht auch direkt, dass die obige Funktion auch hier eine Lösung ist.) Für $u_0 = 0$ löst $u = 0$ das Problem. Die Eindeutigkeit zeigt man ähnlich wie in Beispiel 1.29. Siehe auch Beispiel 5.11. $\square$

c) Das Problem

$$u'(t) = \sqrt{|u(t)|}, \quad t \geq 0, \quad u(0) = 0, \quad (1.11)$$

hat die Lösung $v = 0$. Wenn wir andererseits (1.8) für die Startzeit $\alpha > 0$ und $u > 0$ anwenden, erhalten wir

$$t - \alpha = \int_{\alpha}^t 1 \, ds = \int_{u(\alpha)}^{u(t)} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_{u(\alpha)}^{u(t)} = 2\sqrt{u(t)} - 2\sqrt{u(\alpha)}$$

für $t \geq \alpha$. Sei nun $u(\alpha) \rightarrow 0$ für $\alpha \rightarrow 0$. Dann ergibt sich die Funktion $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$; $u(t) = \frac{1}{4}t^2$. Ein Probe zeigt, dass auch diese Funktion auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ das Problem (1.11) löst. Ferner können wir oben $u(\alpha) = 0$ setzen und die resultierende Funktion u_α mit 0 auf $[0, \alpha]$ fortsetzen. Für jedes $\alpha > 0$ liefert dies eine weitere Lösung

$$u_\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}; \quad u_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \alpha, \\ \frac{1}{4}(t - \alpha)^2, & t > \alpha. \end{cases}$$

Also sind die Lösungen nicht eindeutig bestimmt, wobei $f(u_0) = f(0) = 0$ gilt.

Wir² betrachten nun (1.11) auf dem Zeitintervall $[-1, \infty)$ mit Anfangswert $\tilde{u}(-1) = \frac{1}{4}$. Hier können wir die obigen Lösungen zu

$$\tilde{u}_\alpha : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; \quad \tilde{u}_\alpha(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}t^2, & -1 \leq t < 0, \\ 0, & 0 \leq t \leq \alpha, \\ \frac{1}{4}(t - \alpha)^2, & t > \alpha. \end{cases}$$

fortsetzen, wobei $\alpha \geq 0$ ist. Ferner löst

$$\tilde{u}_\infty : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; \quad \tilde{u}_\infty(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}t^2, & -1 \leq t < 0, \\ 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

das Problem auf $[-1, \infty)$. Somit verzweigt sich $t \mapsto -\frac{1}{4}t^2$ bei $\tilde{u}(0) = 0$ in unendlich viele Lösungen. $\diamond$

²Dieser Teil wurde gegenüber der Vorlesung etwas korrigiert.

KAPITEL 2

Konvergenz und Stetigkeit

Im ersten Kapitel verallgemeinern wir die Theorie der Grenzwerte und der Stetigkeit, die wir in Analysis 1 in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ bezüglich des Betrags entwickelt haben, auf sogenannte normierte Vektorräume und metrische Räume. Diese Strukturen bilden die Grundlage für Konvergenzbetrachtungen in großen Teilen der Mathematik. Wir diskutieren in diesem Kontext auch eine Reihe von Begriffen und Resultaten, die im ersten Semester nicht behandelt worden sind. Durchweg sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

2.1. Normierte Vektorräume und metrische Räume

Wir schreiben X für einen Vektorraum $(X, +, \cdot, 0)$ über $\mathbb{K}$ und nehmen stets $X \neq \{0\}$ an. In der folgenden Definition kombinieren wir diese algebraische Struktur mit einem Begriff, der es uns erlaubt Konvergenz in X zu erklären. Dieses neue Konzept der Norm besitzt gerade die wesentlichen Eigenschaften des Betrags, durch die die folgende Grenzwertdefinition mit der linearen Struktur verbunden wird. Wir definieren Folgen in Mengen M wie in $\mathbb{K}$ als Abbildungen der Form $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow M$; $\varphi(n) = x_n$, und schreiben $(x_n)_{n \geq 1} = (x_n)$ statt φ .

DEFINITION 2.1. *Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Norm auf X ist eine Abbildung $N : X \rightarrow \mathbb{R}$; $N(x) = \|x\|$, die für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ den Eigenschaften*

- (N1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (Definitheit),
- (N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (Homogenität),
- (N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

genügt. Dann heißt $(X, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum, wobei wir $\|\cdot\|$ statt N schreiben.

Eine Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ in X konvergiert (in X) gegen einen Grenzwert $x \in X$, wenn die Aussage

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon : \quad \|x_n - x\| \leq \varepsilon \quad (2.1)$$

gilt. Man schreibt dann $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ oder $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$). Ferner verwendet man die Symbole X statt $(X, \|\cdot\|)$, wenn die Norm durch den Kontext eindeutig bestimmt ist; sowie $\|x\|_X$ statt $\|x\|$, wenn dies nicht der Fall ist.

Da der Nullvektor $\underline{0}$ in X gleich $0 \cdot \underline{0}$ ist (mit $0 \in \mathbb{K}$), folgt aus (N2) schon die Teilaussage $\|\underline{0}\| = 0$ von (N1). Diese Tatsache wird in den folgenden Beispielen verwendet.

Man interpretiert $\|x\|$ als ‘Länge’ des Vektors x und $\|x - y\|$ als ‘Abstand’ von x und y , vergleiche Beispiel 2.3. Man beachte, dass (x_n) genau dann für $n \rightarrow \infty$ gegen x konvergiert, wenn die reelle Folge $(\|x_n - x\|)_n$ gegen 0 strebt.

Wir zeigen zunächst einige einfache Eigenschaften der Norm und der konvergenten Folgen. Diese gleichen den entsprechenden Aussagen aus Analysis 1. Allerdings besitzt X im allgemeinen keine Ordnungsstruktur wie $\mathbb{R}$, und die Multiplikation im Körper $\mathbb{K}$ muss durch die Skalarmultiplikation in X ersetzt werden.

SATZ 2.2. *Seien X ein normierter Vektorraum, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, sowie $x_n, x, y_n, y \in X$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- a) *Die Norm ist nichtnegativ; d.h., $\|x\| \geq 0$, und erfüllt die umgekehrte Dreiecksungleichung $\|x - y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right|$.*
- b) *Die Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ hat keinen weiteren Grenzwert.*
- c) *Die Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ ist beschränkt; d.h., es gilt $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$.*
- d) *Es konvergiert $\alpha x_n + \beta y_n \rightarrow \alpha x + \beta y$ für $n \rightarrow \infty$.*

BEWEIS. Die Aussagen b) und c) werden in Satz 2.16 in einem allgemeineren Rahmen gezeigt. Der zweite Teil von a) ergibt sich aus (N3) genauso wie beim Betrag in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Weiter schließen wir aus (N1)–(N3) auf die Abschätzung

$$0 = \|0\| = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|(-1)x\| = 2\|x\|$$

für jedes $x \in X$, sodass auch der erste Teil von a) gilt. Wir beweisen ferner Aussage d) mit den gleichen Argumenten wie in Satz 2.7 von Analysis 1. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Nach (2.1) gibt es solche Indizes $N_{\varepsilon, x}$ und $N_{\varepsilon, y}$ aus $\mathbb{N}$, dass die Aussagen

$$\forall n \geq N_{\varepsilon, x} : \|x_n - x\| \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad \forall n \geq N_{\varepsilon, y} : \|y_n - y\| \leq \varepsilon$$

erfüllt sind. Es folgt dann mit (N3) und (N2) die Ungleichung

$$\|\alpha x_n + \beta y_n - (\alpha x + \beta y)\| \leq \|\alpha(x_n - x)\| + \|\beta(y_n - y)\| \leq (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon$$

für alle $n \geq N_\varepsilon := \max\{N_{\varepsilon, x}, N_{\varepsilon, y}\}$, und damit die Behauptung d). $\square$

Wir diskutieren zunächst die für uns zentralen endlichdimensionalen Beispiele.

BEISPIEL 2.3. a) $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ ist ein normierter Vektorraum. Dies folgt sofort aus den Sätzen 1.6 und 1.31 in Analysis 1. Wir versehen $\mathbb{K}$ stets mit dieser Norm, sofern nicht anderes gesagt wird.

b) Sei $X = \mathbb{K}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = (x_1 \ \cdots \ x_m)^\top \in \mathbb{K}^m$ setzt man

$$|x|_p = \left(\sum_{k=1}^m |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{falls } 1 \leq p < \infty, \quad \text{und} \quad |x|_\infty = \max_{k \in \{1, \dots, m\}} |x_k|.$$

Man spricht dann von der p -Norm bzw. der *Maximumsnorm*. Wir schreiben auch $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m$. In der geometrischen Interpretation von $\mathbb{R}^m$ für $m \in \{2, 3\}$ ist

$|x|_2$ gerade die euklidische Länge. Auf $\mathbb{R}^2$ entspricht $|(x, y)|_2$ gerade dem Betrag auf $\mathbb{C}$. Für beliebige m dient der $\mathbb{R}^m$ auch zur Beschreibung von Systemen, deren Zustände man mit m Zahlen bestimmen kann. Ein Beispiel ist eine chemische Reaktion mit m Spezies, bei der räumliche Variationen, Temperatur usw. keine Rolle spielen. Hier beinhaltet der Vektor $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ die Stoffmengen $u_k \geq 0$ der m Spezies. Somit ist $|u|_1$ die gesamte Stoffmenge und $|u|_\infty$ die maximale.

Seien nun $p \in [1, \infty]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in \mathbb{K}^m$. Zunächst ist Bedingung (N1) erfüllt, da offenbar aus $|x|_p = 0$ schon $x = 0$ folgt. Ferner gelten die Gleichungen

$$|\alpha x|_p = \left(\sum_{k=1}^m |\alpha|^p |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| |x|_p \quad \text{für } p < \infty,$$

$$|\alpha x|_\infty = \max_{k \in \{1, \dots, m\}} |\alpha| |x_k| = |\alpha| |x|_\infty,$$

sodass $|\cdot|_p$ auch die Eigenschaft (N2) besitzt. Da $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$ für jedes $k \in \{1, \dots, m\}$ ist, erhalten wir ferner (N3) für $p \in \{1, \infty\}$. Somit sind $|\cdot|_1$ und $|\cdot|_\infty$ Normen auf $\mathbb{K}^m$. Die verbleibenden Fälle werden unten diskutiert. $\diamond$

Sei $p \in [1, \infty]$. Wir setzen

$$p' := \frac{p}{p-1} \in (1, \infty) \quad \text{für } 1 < p < \infty, \quad \text{sowie } 1' := \infty \text{ und } \infty' := 1.$$

Dabei heißt p' zu p *konjugierter Exponent*. Es sei ferner $\frac{1}{\infty} = 0$. Ein wenig Bruchrechnung zeigt dann die wichtigen Aussagen

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1; \quad p'' = p; \quad p' = 2 \iff p = 2; \quad p \leq q \implies q' \leq p' \quad (2.2)$$

für alle $1 \leq p, q \leq \infty$. Im nächsten Satz beweisen wir im einfachsten Fall zwei Ungleichungen, die von grundlegender Bedeutung für die Analysis sind.

SATZ 2.4. *Seien $p \in [1, \infty]$ und $x, y \in \mathbb{K}^m$. Dann ist $(\mathbb{K}^m, |\cdot|_p)$ ein normierter Vektorraum, und es gelten die Ungleichungen*

- a) $\left| \sum_{k=1}^m x_k y_k \right| \leq \sum_{k=1}^m |x_k y_k| \leq |x|_p |y|_{p'} \quad (\text{Hölder}),$
- b) $|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p \quad (\text{Minkowski}).$

BEWEIS. Im Hinblick auf Beispiel 2.3 bleibt nur noch Behauptung a), sowie b) für $p \in (1, \infty)$ zu zeigen. Die erste behauptete Abschätzung in a) folgt direkt aus der Dreiecksungleichung für den Betrag. Außerdem ergibt sich die Höldersche Ungleichung für $p \in \{1, \infty\}$ leicht aus den Definitionen. Seien also p und $p' = p/(p-1)$ aus $(1, \infty)$, sowie x und y aus $\mathbb{K}^m \setminus \{0\}$. (Wenn einer der Vektoren gleich 0 ist, dann gelten offenbar a) und b).)

a) Für Zahlen $a, b \geq 0$ haben wir in Beispiel 5.27 von Analysis 1 die Youngsche Ungleichung

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

bewiesen. Wir setzen hier $a = |x_k|/|x|_p$ und $b = |y_k|/|y|_{p'}$ für $k \in \{1, \dots, m\}$ ein und erhalten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \frac{|x_k y_k|}{|x|_p |y|_{p'}} &= ab \leq \frac{|x_k|^p}{p |x|_p^p} + \frac{|y_k|^{p'}}{p' |y|_{p'}^{p'}}, \\ \frac{1}{|x|_p |y|_{p'}} \sum_{k=1}^m |x_k y_k| &\leq \frac{1}{p |x|_p^p} \sum_{k=1}^m |x_k|^p + \frac{1}{p' |y|_{p'}^{p'}} \sum_{k=1}^m |y_k|^{p'} = 1, \end{aligned}$$

was die Höldersche Ungleichung nach sich zieht.

b) Mittels der Dreiecksungleichung für den Betrag und Teil a) berechnen wir

$$\begin{aligned} |x + y|_p^p &= \sum_{k=1}^m |x_k + y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \leq \sum_{k=1}^m |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^m |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \\ &\leq |x|_p \left(\sum_{k=1}^m |x_k + y_k|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} + |y|_p \left(\sum_{k=1}^m |x_k + y_k|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= (|x|_p + |y|_p) |x + y|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Wenn $x + y \neq 0$ ist, folgt die Minkowski-Ungleichung per Division; andernfalls gilt sie trivialerweise. $\square$

Der folgende Begriff erlaubt es (z.B. in der linearen Algebra) Winkel zu erklären.

BEMERKUNG 2.5. Sei $p = 2$ (und somit $p' = 2$). Man definiert das *Skalarprodukt*

$$(x|y) = \sum_{k=1}^m x_k \overline{y_k}$$

für $x, y \in \mathbb{K}^m$. Es induziert die *euklidische Norm* $|\cdot|_2$ gemäß der Gleichung

$$(x|x) = \sum_{k=1}^m |x_k|^2 = |x|_2^2.$$

In diesem Fall nennt man die Höldersche Ungleichung

$$|(x|y)| \leq \sum_{k=1}^m |x_k y_k| \leq |x|_2 |y|_2.$$

auch *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*. $\diamond$

In Beispiel 2.3 haben wir auf dem $\mathbb{K}^m$ eine unendliche Familie von Normen eingeführt. Die nächsten Konzepte ermöglichen es, solche Normen zu vergleichen.

DEFINITION 2.6. Sei X ein normierter Vektorraum, sowie $\|\cdot\|$ und $\|\!\|\!\cdot\!\|$ Normen auf X . Die Norm $\|\!\|\!\cdot\!\|$ heißt *feiner oder stärker als* $\|\cdot\|$ (und $\|\cdot\|$ *gröber als* $\|\!\|\!\cdot\!\|$), wenn es so eine Konstante $C > 0$ gibt, dass $\|x\| \leq C \|\!\|x\!\|$ für alle $x \in X$ gilt. Die beiden Normen heißen *äquivalent*, wenn es solche Konstanten $c, C > 0$ gibt, dass

$$c \|\!\|x\!\| \leq \|x\| \leq C \|\!\|x\!\|$$

für alle $x \in X$ erfüllt ist. Man schreibt dann $\|\cdot\| \sim \|\!\|\!\cdot\!\|$.

In $(X, \|\cdot\|)$ definiert man für $x \in X$ und $r > 0$ die Mengen

$$\begin{aligned} B_X(x, r) &= B(x, r) = \{y \in X \mid \|x - y\| < r\} && (\text{offene Kugel}), \\ \overline{B}_X(x, r) &= \overline{B}(x, r) = \{y \in X \mid \|x - y\| \leq r\} && (\text{abgeschlossene Kugel}), \\ S_X(x, r) &= S(x, r) = \{y \in X \mid \|x - y\| = r\} && (\text{Sphäre}). \end{aligned}$$

Im Hinblick auf (2.1) beachte man die Äquivalenz

$$\|x - y\| \leq \varepsilon \iff y \in \overline{B}(x, \varepsilon). \quad (2.3)$$

In $\mathbb{R}^2$ ist die Einheitskugel $\overline{B}(0, 1)$ für $\|\cdot\|_2$ die Kreisscheibe der Elementargeometrie, für $\|\cdot\|_1$ die Raute mit Ecken $(\pm 1, 0)^\top$ und $(0, \pm 1)^\top$ und für $\|\cdot\|_\infty$ das Quadrat mit den Ecken $(\pm 1, 1)^\top$ und $(\pm 1, -1)^\top$. Für den Betrag in $\mathbb{R}$ gilt $B(x, r) = (x - r, x + r)$.

Wir zeigen nun, dass äquivalente Normen die gleichen Grenzwertaussagen nach sich ziehen. Dabei ist $\overline{B}_{\|\cdot\|}(x, r)$ die Kugel bezüglich der Norm $\|\cdot\|$.

SATZ 2.7. *Seien $\|\cdot\|$ und $\|\!\|\!\cdot\!\|$ Normen auf einem normierten Vektorraum X . Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig.*

- a) *Die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\!\|\!\cdot\!\|$ sind äquivalent.*
- b) *Es gibt solche Konstanten $C, c > 0$, dass für alle $x \in X$ und $r > 0$ die Inklusionen $\overline{B}_{\|\!\|\!\cdot\!\|}(x, \frac{r}{C}) \subseteq \overline{B}_{\|\cdot\|}(x, r) \subseteq \overline{B}_{\|\!\|\!\cdot\!\|}(x, \frac{r}{c})$ gelten.*
- c) *Für alle $x \in X$ und Folgen (x_n) in X konvergiert $x_n \rightarrow x$ genau dann für $\|\cdot\|$ für $n \rightarrow \infty$, wenn $x_n \rightarrow x$ für $\|\!\|\!\cdot\!\|$ konvergiert.*
- d) *X hat bezüglich der Normen $\|\cdot\|$ und $\|\!\|\!\cdot\!\|$ die gleichen Nullfolgen.*

BEWEIS. Es gelte Aussage a) mit den Konstanten C und c aus Definition 2.6. Seien $x \in X$, $r > 0$ und $y \in \overline{B}_{\|\cdot\|}(x, r)$. Aus a) folgt dann die Ungleichung $\|x - y\| \leq c^{-1} \|x - y\| \leq r/c$, sodass y in $\overline{B}_{\|\!\|\!\cdot\!\|}(x, \frac{r}{c})$ liegt. Also gilt die zweite Inklusion in b). Die erste zeigt man analog.

Die Implikation von b) nach c) folgt aus der Definition (2.1) und der Äquivalenz (2.3); die von c) nach d) ist klar.

Wir zeigen die verbleibende Implikation von d) nach a), indem wir aus $\neg a)$ auf die Aussage $\neg d)$ schließen. Wenn a) falsch ist, dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Vektor $x_n \in X$, für den $\|x_n\| > n \|x_n\|$ oder $\|x_n\| > n \|\!\|\!\cdot\!\|$ gilt. Es sei etwa der erste Fall für eine Teilfolge $(x_{n_j})_j$ erfüllt. (Die andere Alternative behandelt man entsprechend.) Wir setzen $y_{n_j} = \|x_{n_j}\|^{-1} x_{n_j}$ für $j \in \mathbb{N}$. Damit gelten die Gleichung $\|y_{n_j}\| = 1$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ und die Konvergenz

$$\|y_{n_j}\| = \frac{\|x_{n_j}\|}{\|x_{n_j}\|} < \frac{1}{\|\!\|\!\cdot\!\|} \frac{\|x_{n_j}\|}{n_j} = \frac{1}{n_j} \longrightarrow 0$$

für $j \rightarrow \infty$. Damit ist auch die Aussage d) falsch. $\square$

Wie zeigen nun die Äquivalenz der p -Normen auf $\mathbb{K}^m$ mit expliziten, z.T. von m abhängigen Konstanten. Die erste Ungleichung wird im Falle $\mathbb{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{K}^m$ zur Gleichung, da $\|\mathbb{1}\|_p = m^{\frac{1}{p}}$, und die zweite für $x = e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^m$.

SATZ 2.8. Seien $1 \leq p \leq q \leq \infty$ und $x \in \mathbb{K}^m$. Dann gelten die Ungleichungen

$$|x|_p \leq m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} |x|_q \quad \text{und} \quad |x|_q \leq |x|_p.$$

BEWEIS. Für $p = q$ sind die Behauptungen klar. Es seien also $1 \leq p < q \leq \infty$.

1) Wir beginnen mit der ersten Ungleichung. Da $|x_k| \leq |x|_\infty$ ist, folgt zunächst $|x|_p \leq m^{1/p} |x|_\infty$ aus der Definition der p -Norm. Sei nun $q < \infty$. Mit den Exponenten $q/p \in (1, \infty)$ und

$$\left(\frac{q}{p}\right)' = \frac{\frac{q}{p}}{\frac{q}{p} - 1} = \frac{q}{q - p}$$

impliziert die Höldersche Ungleichung die Abschätzung

$$|x|_p^p = \sum_{k=1}^m 1 |x_k|^p \leq \left(\sum_{k=1}^m 1^{\frac{q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{q}} \left(\sum_{k=1}^m |x_k|^{p \frac{q}{p}} \right)^{\frac{p}{q}} = m^{1-\frac{p}{q}} |x|_q^p,$$

was die erste Behauptung nach sich zieht.

2) Die zweite Aussage ist klar, wenn $x = 0$ ist. Die Definition der p -Norm liefert sie für $q = \infty$. Seien nun $x \neq 0$ und $q < \infty$. Wir setzen $y = |x|_p^{-1} x$. Daraus ergibt sich zuerst $|y_k| \leq |y|_p = |x|_p^{-1} |x|_p = 1$ und damit die Ungleichung

$$\frac{|x|_q}{|x|_p} = |y|_q = \left(\sum_{k=1}^m |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^m |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p} \frac{p}{q}} = |y|_p^{\frac{p}{q}} = 1.$$

Diese zeigt die gewünschte Relation $|x|_q \leq |x|_p$. □

In $\mathbb{R}^2$ erhalten wir etwa $\overline{B}_{|\cdot|_1}(0, 1) \subseteq \overline{B}_{|\cdot|_2}(0, 1) \subseteq \overline{B}_{|\cdot|_\infty}(0, 1) \subseteq \overline{B}_{|\cdot|_1}(0, 2)$, wobei wir diese Kugeln oben beschrieben haben.

Gemäß des nächsten Satzes sind die Grenzwerte in $\mathbb{K}^m$ bezüglich einer p -Norm gerade durch die komponentenweise Konvergenz gegeben.

SATZ 2.9. Seien $1 \leq p \leq \infty$, $v_n = (x_{n1}, \dots, x_{nm}) \in \mathbb{K}^m$ für $n \in \mathbb{N}$ und $v = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m$. Dann gilt für $n \rightarrow \infty$ die Äquivalenz

$$v_n \rightarrow v \quad \text{bezüglich } |\cdot|_p \quad \Longleftrightarrow \quad x_{nj} \rightarrow x_j \quad \text{in } \mathbb{K} \text{ für jedes } j \in \{1, \dots, m\}.$$

BEWEIS. Die Implikation ' $\Rightarrow$ ' folgt aus der Konvergenzdefinition und der Ungleichung $|v_n - v|_p \geq |x_{nj} - x_j|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1, \dots, m\}$. Es gelte nun die komponentenweise Konvergenz. Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$ existiert dann so ein Index $N_{\varepsilon,j} \in \mathbb{N}$, dass für alle $n \geq N_{\varepsilon,j}$ die Ungleichung $|x_{nj} - x_j| \leq \varepsilon$ gilt. Für jedes $n \geq N_\varepsilon := \max\{N_{\varepsilon,1}, \dots, N_{\varepsilon,m}\}$ erhalten wir dann die Abschätzung

$$|v_n - v|_p \leq |v_n - v|_1 = \sum_{j=1}^m |x_{nj} - x_j| \leq m\varepsilon,$$

wobei wir auch Satz 2.8 verwendet haben. □

Zum Beispiel konvergieren die Vektoren $v_n = (e^{1/n}, 2n/(1+n))$ in $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_p)$ gegen $(1, 2)$ für $n \rightarrow \infty$, während die Folge $((e^{1/n}, n))_n$ divergiert. Wir behandeln nun (unendlichdimensionale) Funktionenräume, die wir schon aus Analysis 1 kennen. Eine Variante des ersten Beispiels wird im letzten Kapitel eine wichtige Rolle spielen. Funktionenräume werden vertieft in späteren Vorlesungen untersucht.

BEISPIEL 2.10. a) Sei $E = C([a, b])$ für $a < b$. Wir wissen aus Analysis 1, dass E ein Vektorraum ist. Er ist unendlichdimensional, da die Polynome $p_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; $p_n(s) = s^n$, in E liegen und linear unabhängig sind. Für $f \in E$ setzt man

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &= \sup_{s \in [a, b]} |f(s)| = \max_{s \in [a, b]} |f(s)| && (\text{Supremumsnorm}), \\ \|f\|_1 &= \int_a^b |f(s)| \, ds && (1\text{-Norm}).\end{aligned}$$

Um diese Ausdrücke zu interpretieren, sei $f(s) \geq 0$ für alle $s \in [a, b]$ und $f(s)$ sei die Konzentration eines Stoffes an der Stelle s . Dann ist $\|f\|_\infty$ die maximale Konzentration und $\|f\|_1$ die Gesamtmenge des Stoffes. Für zwei Funktionen f und g in E ist $\|f - g\|_\infty$ der maximale Abstand zwischen $f(s)$ und $g(s)$. Außerdem strebt $\|f_n - f\|_\infty$ genau dann für $n \rightarrow \infty$ gegen 0, wenn f_n gegen f gleichmäßig konvergiert. Hingegen ist $\|f - g\|_1$ die Fläche zwischen den Graphen von f und g . Im Falle von $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ spricht man von der *Konvergenz im Mittel*.

Wir behaupten, dass $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_1$ Normen auf E sind, dass $\|\cdot\|_\infty$ feiner als $\|\cdot\|_1$ ist und dass diese Normen nicht äquivalent sind.

BEWEIS. Seien $f, g \in E$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Offenbar folgt aus $\|f\|_\infty = 0$ schon $f = 0$. Die entsprechende Aussage für die 1-Norm wurde in einer Übung gezeigt. Weiter gilt jeweils (N2) wegen

$$\begin{aligned}\|\alpha f\|_\infty &= \sup_{s \in [a, b]} |\alpha| |f(s)| = |\alpha| \|f\|_\infty, \\ \|\alpha f\|_1 &= \int_a^b |\alpha| |f(s)| \, ds = |\alpha| \|f\|_1.\end{aligned}$$

wobei wir Satz 2.31 in Analysis 1, bzw. die Linearität des Integrals benutzt haben. Wir verwenden weiter die Dreiecksungleichung in $\mathbb{K}$, Bemerkung 1.15 f) in Analysis 1 und Satz 1.6, um (N3) mittels

$$\begin{aligned}\|f + g\|_\infty &= \sup_{s \in [a, b]} |f(s) + g(s)| \leq \sup_{s \in [a, b]} (|f(s)| + |g(s)|) \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \\ \|f + g\|_1 &= \int_a^b |f(s) + g(s)| \, ds \leq \int_a^b (|f(s)| + |g(s)|) \, dt = \|f\|_1 + \|g\|_1.\end{aligned}$$

zu zeigen. Satz 1.6 liefert ferner die Abschätzung

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(s)| \, ds \leq (b - a) \|f\|_\infty$$

der Normen. Die Äquivalenz der Normen gilt nicht. Dazu betrachten wir die Funktion $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; $f_n(s) = (b-a)^{-n}(s-a)^n$, die den Gleichungen $\|f_n\|_\infty = 1$ und $\|f_n\|_1 = (b-a)/(n+1)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ genügt. $\square$

b) Sei $E = PC([a, b])$. Für $f \in E$ setze $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$. Dies ist keine Norm, da etwa $\|\mathbb{1}_{\{a\}}\|_1 = 0$, aber $\mathbb{1}_{\{a\}} \neq 0$ ist. $\diamond$

In Analysis 1 beruhen z.B. viele Konvergenzkriterien für Reihen oder die Konstruktion des Integrals auf der Tatsache, dass in $\mathbb{K}$ jede Cauchyfolge einen Grenzwert besitzt. Ganz entsprechend kann man nur in normierten Vektorräumen mit dieser Eigenschaft erfolgreich Analysis betreiben.

DEFINITION 2.11. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Eine Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ in X ist eine Cauchyfolge, wenn die Aussage

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N_\varepsilon : \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon \quad (2.4)$$

gilt. Wenn jede Cauchyfolge in $(X, \|\cdot\|)$ einen Grenzwert besitzt, dann heißen $(X, \|\cdot\|)$ und $\|\cdot\|$ vollständig und $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.

Wir notieren einige einfache Eigenschaften dieser Begriffe.

BEMERKUNG 2.12. Sei X ein normierter Vektorraum. Dann gelten die folgenden Aussagen.

- a) Nach Theorem 2.27 in Analysis 1 ist $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ ein Banachraum.
- b) Wenn zwei Normen auf X äquivalent sind und eine der beiden Normen vollständig ist, dann ist es auch die andere. Diese Tatsache beweist man wie Satz 2.7.
- c) Wie in Satz 2.2 zeigt man, dass eine Cauchyfolge in X beschränkt ist und dass mit (x_n) und (y_n) auch $(\alpha x_n + \beta y_n)$ eine Cauchyfolge in X ist, wobei α und β in $\mathbb{K}$ liegen.
- d) Die Definitionen implizieren, dass eine in X konvergente Folge eine Cauchyfolge in X ist. (Vergleiche Theorem 2.27 in Analysis 1 oder Satz 2.16 unten.) $\diamond$

Wir behandeln nun die beiden für uns wichtigsten Beispiele.

SATZ 2.13. a) $(\mathbb{K}^m, |\cdot|_p)$ ist für jedes $p \in [1, \infty]$ ein Banachraum.

b) $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum, $(C([a, b]), \|\cdot\|_1)$ ist kein Banachraum.

BEWEIS. Nach Satz 2.4 bzw. Beispiel 2.10 liegen in a) und b) normierte Vektorräume vor, sodass wir nur ihre Vollständigkeit zu diskutieren haben.

a) Sei $(v_n)_n = ((x_{n1}, \dots, x_{nm}))_n$ eine Cauchyfolge in $(\mathbb{K}^m, |\cdot|_p)$. Die Ungleichung $|v_n - v_k|_p \geq |x_{nj} - x_{kj}|$ impliziert, dass $(x_{nj})_n$ für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ ist. Diese hat gemäß Bemerkung 2.12 einen Grenzwert x_j in $\mathbb{K}$. Aus Satz 2.9 schließen wir dann die Konvergenz von $(v_n)_n$ gegen $v = (x_1, \dots, x_m)$ in $(\mathbb{K}^m, |\cdot|_p)$, sodass dieser Raum vollständig ist.

b) Sei $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$. Da $\|f_n - f_m\|_\infty \geq |f_n(s) - f_m(s)|$ für alle $s \in [a, b]$ und $n, m \in \mathbb{N}$ gilt, ist $(f_n(s))_n$ für jedes $s \in [a, b]$ eine Cauchyfolge

in $\mathbb{K}$. Diese besitzt einen Grenzwert $f(s)$ in $\mathbb{K}$. Sei weiter $\varepsilon > 0$ und $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ der Index aus (2.4) für (f_n) . Aus der Aussage (2.4) folgt dann für alle $s \in [a, b]$ und $n \geq N_\varepsilon$ die Ungleichung

$$|f_n(s) - f(s)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(s) - f_m(s)| \leq \varepsilon.$$

Also konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f . Theorem 4.41 aus Analysis 1 besagt nun, dass f stetig ist. Somit streben die Funktionen f_n in $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ gegen f , was den ersten Teil von b) zeigt.

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2/(b-a)$ definieren wir die stetigen Funktionen

$$f_n(s) = \begin{cases} 1, & a \leq s \leq \frac{a+b}{2}, \\ -ns + 1 + n\frac{a+b}{2}, & \frac{a+b}{2} < s \leq \frac{a+b}{2} + \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{a+b}{2} + \frac{1}{n} < s \leq b. \end{cases}$$

Da diese Funktionen Werte im Intervall $[0, 1]$ annehmen, gilt die Ungleichung

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_a^b |f_n(s) - f_m(s)| ds = \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+b}{2} + \frac{1}{m}} |f_n(s) - f_m(s)| ds \leq \frac{1}{m}$$

für alle $n \geq m > 2/(b-a)$. Also ist (f_n) eine Cauchyfolge in $(C([a, b]), \|\cdot\|_1)$. Wir nehmen an, dass diese Folge einen Grenzwert f in diesem Raum besäße. Daraus folgt zunächst die Konvergenz

$$0 \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(s) - 1| ds = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(s) - f_n(s)| ds \leq \int_a^b |f(s) - f_n(s)| dt \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$, und somit

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(s) - 1| ds = 0,$$

Nach einer Übung ist die stetige Funktion f auf $[a, (a+b)/2]$ gleich 1. Analog sieht man aber auch die Gleichung $f = 0$ auf $[(a+b)/2, b]$ für jedes $\delta \in (0, (b-a)/2)$ ein. Dieser Widerspruch impliziert die letzte Behauptung. $\square$

Die Norm des Banachraums $(\mathbb{K}^m, |\cdot|_2)$ ist nach Bemerkung 2.5 durch ein Skalarprodukt gegeben. Solche Banachräume heißen *Hilberträume*.

Im einem normierten Vektorraum werden Konvergenzbetrachtungen mit der algebraischen Struktur verbunden. Diese enge Verbindung ist aber für eine Theorie der Grenzwerte und Stetigkeit unnötig, und schon die Untersuchung von Limiten auf Teilmengen eines normierten Vektorraum verläßt den Rahmen der linearen Struktur. Die Konvergenzdefinition (2.1) benötigt jedoch statt der Norm der Vektoren nur ihren Abstand. Mit wenigen Eigenschaften führen wir nun einen Abstandsbegriff ein, der eine weitreichende Theorie ermöglicht.

DEFINITION 2.14. *Sei M eine nichtleere Menge. Eine Abbildung $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Metrik, wenn die Aussagen*

$$(M1) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y \quad (\text{Definitheit}),$$

- (M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),
 (M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

für alle $x, y, z \in M$ gelten. Man nennt (M, d) (oder M) einen metrischen Raum.

Eine Folge (x_n) in M konvergiert in (M, d) gegen einen Grenzwert $x \in M$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon : \quad d(x_n, x) \leq \varepsilon \quad (2.5)$$

erfüllt ist. Man schreibt dann $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ oder $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$). Eine Folge (x_n) in M heißt Cauchyfolge, falls sie der Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N_\varepsilon : \quad d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \quad (2.6)$$

genügt. Ein metrischer Raum ist vollständig, wenn in ihm jede Cauchyfolge konvergiert.

In einem metrischen Raum M gilt $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in M$, da die Eigenschaften (M1)–(M3) die Ungleichung

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y) \quad (2.7)$$

implizieren. Ferner konvergiert eine Folge (x_n) in M genau dann gegen ein x , wenn $(d(x_n, x))_n$ eine reelle Nullfolge ist. Für $x \in M$ und $r > 0$ schreiben wir wieder

$$\begin{aligned} B_M(x, r) &= B(x, r) = \{y \in M \mid d(y, x) < r\} && \text{(offene Kugel),} \\ \overline{B}_M(x, r) &= \overline{B}(x, r) = \{y \in M \mid d(y, x) \leq r\} && \text{(abgeschlossene Kugel),} \\ S_M(x, r) &= S(x, r) = \{y \in M \mid d(y, x) = r\} && \text{(Sphäre).} \end{aligned}$$

Wir diskutieren einige typische Beispiele für diese Begriffe. Nur das erste wird uns in dieser Vorlesung weiter beschäftigen. Eine Beschränkung auf diese Situation würde aber die folgende Darstellung nicht vereinfachen. Das letzte Beispiel ist ein Prototyp für eine Klasse von metrischen Räumen, die in fortgeschritteneren Analysisvorlesungen eine Rolle spielt.

BEISPIEL 2.15. a) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $\emptyset \neq M \subseteq X$. Dann definiert $d(x, y) = \|x - y\|$ für $x, y \in M$ eine Metrik auf M . Es gilt ferner

$$B_M(x, r) = \{y \in M \mid d(y, x) = \|y - x\| < r\} = B_X(x, r) \cap M.$$

BEWEIS. Seien $x, y, z \in X$. Dann implizieren (N1), (N2) bzw. (N3) die Aussagen

$$\begin{aligned} 0 = d(x, y) &= \|x - y\| \iff x - y = 0 \iff x = y, \\ d(x, y) &= \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = \|y - x\| = d(y, x), \\ d(x, z) &= \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Die letzte Behauptung ist klar. □

b) Sei $M \neq \emptyset$. Dann ist die *diskrete Metrik* auf M durch

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases}$$

gegeben. In der Tat, gelten (M1) und (M2) per Definition. Die Eigenschaft (M3) ist klar, wenn $x = z$ und somit $d(x, z) = 0$ ist. Für $x \neq z$ haben wir $d(x, z) = 1$, sowie $x \neq y$ oder $y \neq z$, sodass auch hier (M3) erfüllt ist. In diesem Raum gibt es nur die trivialen abgeschlossenen Kugeln $\overline{B}(x, r) = \{x\}$ für $r < 1$ und $\overline{B}(x, r) = M$ für $r \geq 1$. Also konvergieren nur Folgen, die ab einem Index konstant sind. Ähnlich folgt die Vollständigkeit dieser Metrik.

c) Sei M die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$. Die Länge des kleineren Großkreises durch x und y liefert eine vollständige Metrik in M . Diese Aussage wird hier nicht bewiesen. Solche Beispiele werden in der Differentialgeometrie diskutiert.

d) Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume. Wir setzen

$$d((x, y), (u, v)) = d_1(x, u) + d_2(y, v)$$

für $(x, y), (u, v) \in M_1 \times M_2$. Aus den Eigenschaften (M1)–(M3) und (2.7) für d_1 und d_2 folgt leicht, dass das obige d eine Metrik auf $M_1 \times M_2$ ist. Eine Folge $((x_n, y_n))$ konvergiert genau dann bezüglich d gegen (x, y) in $M_1 \times M_2$, wenn (x_n) in M_1 gegen x und (y_n) in M_2 gegen y streben. (Dies zeigt man wie Satz 2.9.)

e) Sei $M = \{x = (x_j) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}\}$ die Menge aller Folgen. Dann definiert

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}$$

für $x, y \in M$ eine vollständige Metrik auf M . Eine Folge $(v_n)_n = ((x_{nj})_j)_n$ konvergiert genau dann in M gegen $v = (x_j)_j$, wenn jede Komponentenfolge $(x_{nj})_n$ für $n \rightarrow \infty$ in $\mathbb{K}$ gegen x_j konvergiert.

BEWEIS. Man beachte, dass die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$; $\varphi(t) = t/(1+t)$, strikt wächst (da $\varphi'(t) = (1+t)^{-2} > 0$ ist), sowie das Bild $[0, 1)$ und die einzige Nullstelle 0 besitzt. Zunächst konvergiert deswegen die Reihe in der Behauptung. Seien $x, y, z \in M$.

1) Es gilt genau dann $d(x, y) = 0$, wenn jeder Summand in der Summe verschwindet, was zur Gleichheit von x und y äquivalent ist. Somit ist (M1) erfüllt, während (M2) direkt aus der Definition folgt. Da φ wächst, liefert die >Dreiecksungleichung in $\mathbb{K}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{|x_j - y_j + y_j - z_j|}{1 + |x_j - y_j + y_j - z_j|} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{|x_j - y_j| + |y_j - z_j|}{1 + |x_j - y_j| + |y_j - z_j|} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|} + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{|y_j - z_j|}{1 + |y_j - z_j|} \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Also ist d eine Metrik auf M .

2a) Die Folge $(v_n)_n = ((x_{nj})_j)_n$ konvergiere in M gegen $v = (x_j)_j$. Sei $j \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Seien $\varepsilon > 0$ gegeben und N_ε der zugehörige Index aus (2.5). Für alle $n \geq N_\varepsilon$ erhalten wir die Ungleichung $\varepsilon \geq d(v_n, v) \geq 2^{-j} \varphi(|x_{nj} - x_j|)$ sodass $(\varphi(|x_{nj} - x_j|))_n$ eine Nullfolge ist. Da φ strikt wächst, existiert die stetige Umkehrfunktion φ^{-1} . Also streben auch die Differenzen $|x_{nj} - x_j| = \varphi^{-1}(\varphi(|x_{nj} - x_j|))$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0; d.h., $(x_{nj})_n$ hat in $\mathbb{K}$ den Grenzwert x_j .

2b) Nun strebe für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Komponentenfolge $(x_{nj})_n$ für $n \rightarrow \infty$ gegen x_j . Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine natürliche Zahl J_ε mit

$$\sum_{j=J_\varepsilon+1}^{\infty} 2^{-j} \leq \varepsilon,$$

da die geometrische Reihe konvergiert. Für jedes $j \in \{1, \dots, J_\varepsilon\}$ finden wir ferner so einen Index $N_{\varepsilon,j} \in \mathbb{N}$, dass für alle $n \geq N_{\varepsilon,j}$ die Ungleichung $|x_{nj} - x_j| \leq \varepsilon$ gilt. Für alle $n \geq N_\varepsilon := \max\{N_{\varepsilon,1}, \dots, N_{\varepsilon,J_\varepsilon}\}$ erhalten wir nun die Abschätzung

$$\begin{aligned} d(v_n, v) &= \sum_{j=1}^{J_\varepsilon} 2^{-j} \frac{|x_{nj} - x_j|}{1 + |x_{nj} - x_j|} + \sum_{j=J_\varepsilon+1}^{\infty} 2^{-j} \frac{|x_{nj} - x_j|}{1 + |x_{nj} - x_j|} \\ &\leq \sum_{j=1}^{J_\varepsilon} 2^{-j} |x_{nj} - x_j| + \sum_{j=J_\varepsilon+1}^{\infty} 2^{-j} \\ &\leq \varepsilon \sum_{j=1}^{J_\varepsilon} 2^{-j} + \varepsilon \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Also strebt $(v_n)_n$ in (M, d) gegen v .

3) Sei $(v_n)_n = ((x_{nj})_j)_n$ eine Cauchyfolge in M . Wie in Teil 2a) sieht man, dass dann auch $(x_{nj})_n$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ ist. Somit hat sie einen Grenzwert x_j in $\mathbb{K}$. Wir setzen $v = (x_j)_j \in M$. Nach Schritt 2b) konvergiert $(v_n)_n$ gegen v bzgl. d . $\square$

Wir zeigen nun einige einfache Eigenschaften konvergenter Folgen in metrischen Räumen. Man beachte, dass die Beweise denen der entsprechenden Sätze in Analysis 1 sehr ähneln und dass gegenüber Satz 2.2 die Linearität wegfällt.

SATZ 2.16. *Seien (M, d) ein metrischer Raum und (x_n) eine Folge in M . Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- a) *Die Folge (x_n) hat höchstens einen Grenzwert in (M, d) .*
- b) *Wenn (x_n) konvergiert, dann ist sie eine Cauchyfolge.*
- c) *Cauchyfolgen (x_n) sind beschränkt; d.h., es gibt so ein Element $x \in M$ und einen Radius $R > 0$, dass alle x_n in $\overline{B}(x, R)$ liegen.*

BEWEIS. a) Es konvergiere (x_n) gegen x und y in M . Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es solche Indizes $N_{\varepsilon,x}$ und $N_{\varepsilon,y}$ in $\mathbb{N}$, dass für alle $n \geq N_{\varepsilon,x}$, bzw. $n \geq N_{\varepsilon,y}$, die Ungleichungen $d(x_n, x) \leq \varepsilon$, bzw. $d(x_n, y) \leq \varepsilon$, gelten. Für den Index $n :=$

$\max\{N_{\varepsilon,x}, N_{\varepsilon,y}\}$ erhalten wir dann die Abschätzung

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \leq 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die Gleichung $d(x, y) = 0$ und somit $x = y$ gemäß (M1).

b) Es gelte $x_n \rightarrow x$. Seien $\varepsilon > 0$ und $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ wie in (2.5). Für alle Indizes $n, m \geq N_\varepsilon$ folgern wir dann

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \leq 2\varepsilon;$$

d.h., (x_n) ist eine Cauchyfolge.

c) Sei (x_n) eine Cauchyfolge. Wir haben den Index $N := N_1$ aus (2.6) für $\varepsilon = 1$. Also gilt die Ungleichung $d(x_n, x_N) \leq 1$ für alle $n \geq N$. Wir setzen $R = \max\{1, d(x_1, x_N), \dots, d(x_{N-1}, x_N)\}$. So ergibt sich die Ungleichung $d(x_n, x_N) \leq R$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

2.2. Topologische Grundbegriffe

Wir diskutieren nun eine Reihe von Begriffen, die wesentliche Eigenschaften von Teilmengen metrischer Räume im Kontext von Konvergenzbetrachtungen beschreiben und die überall in der Analysis verwendet werden.

DEFINITION 2.17. *Sei M ein metrischer Raum.*

a) *Eine Teilmenge $O \subseteq M$ heißt offen (in M), wenn es für jeden Punkt $x \in O$ so einen Radius $r = r(x) > 0$ gibt, dass $B(x, r)$ in O enthalten ist.*

b) *Sei $x \in M$. Eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt Umgebung (in M) von x , wenn es so ein $r > 0$ gibt, dass $B(x, r) \subseteq U$ gilt.*

c) *Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt abgeschlossen (in M), wenn ihr Komplement $M \setminus A$ in M offen ist.*

Man beachte, dass für offene $O \subseteq M$ das Komplement $M \setminus O$ abgeschlossen ist, da $O = M \setminus (M \setminus O)$ gilt. Die obige Definition besagt, dass eine genügend kleine Störung eines Elementes einer offenen Menge noch in ihr liegt. Ferner impliziert sie, dass eine offene Menge O eine Umgebung jedes Punktes $x \in O$ ist.

Wir charakterisieren im nächsten Satz abgeschlossene und offene Mengen mittels konvergenter Folgen: Punkte in offenen Mengen kann man von außen nicht approximieren. Abgeschlossene Mengen sind diejenigen, aus denen kein Grenzwert herausführt. (Dies war gerade die Definition der Abgeschlossenheit in Analysis 1.)

SATZ 2.18. *Seien M ein metrischer Raum und $A, O \subseteq M$. Dann gelten die folgenden Äquivalenzen.*

a) *Die Menge A ist genau dann abgeschlossen in M , wenn für alle Folgen (x_n) in A mit einem Grenzwert x in M stets x in A liegt.*

b) *Die Menge O ist genau dann offen in M , wenn es für kein $x \in O$ eine Folge (y_n) in $M \setminus O$ gibt, die gegen x konvergiert.*

BEWEIS. b) Sei O offen. Wähle einen Punkt $x \in O$. Nach Definition 2.17 gibt es einen Radius $r > 0$ mit $B(x, r) \subseteq O$. Sei nun (x_n) eine Folge, die in M gegen x

konvergiert. Dann liegen alle Folgenglieder ab einem Index in $B(x, r)$ und somit in O . Also gilt die Folgenbedingung in b).

Sei nun O nicht offen. Durch Verneinung liefert Definition 2.17 dann einen Punkt $x_0 \in O$ und Punkte $y_n \in B(x_0, 1/n) \cap (M \setminus O)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Also streben die Elemente y_n gegen x_0 und die Folgenbedingung in b) ist verletzt. Damit haben wir Aussage b) gezeigt.

a) Die Menge A ist definitionsgemäß genau dann abgeschlossen, wenn $M \setminus A$ offen ist. Nach Teil b) ist dies gleichbedeutend dazu, dass es keinen Punkt $y \in M \setminus A$ gibt, der Grenzwert einer Folge (x_n) in $M \setminus (M \setminus A) = A$ ist. Dies ist gerade die Folgenbedingung in Behauptung a). $\square$

Wir diskutieren diese Begriffe mit einigen grundlegenden Beispielen, bei denen wir die obigen Eigenschaften direkt nachrechnen. Wir lernen später in Satz 2.32 eine elegantere Methode zum Nachweis der Offenheit oder Abgeschlossenheit kennen.

BEISPIEL 2.19. Seien M ein metrischer Raum, $x_0 \in M$ und $r > 0$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

a) $B(x_0, r)$ ist offen.

BEWEIS. Sei $x \in B(x_0, r)$. Setze $r(x) = r - d(x, x_0) > 0$. Sei nun $y \in B(x, r(x))$. Dann liefert die Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < d(x_0, x) + r - d(x, x_0) = r.$$

Also liegt y in $B(x_0, r)$ und somit ist $B(x, r(x))$ in $B(x_0, r)$ enthalten. $\square$

b) $\overline{B}(x_0, r)$ ist abgeschlossen und eine Umgebung von jedem $x \in \overline{B}(x_0, r)$.

BEWEIS. Gegeben seien Punkte x_n in $\overline{B}(x_0, r)$ mit $x_n \rightarrow x$ in M für $n \rightarrow \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es einen Index $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_N, x) \leq \varepsilon$. Wir folgern aus der Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_N) + d(x_N, x_0) \leq \varepsilon + r.$$

Da hier $\varepsilon > 0$ beliebig ist, gilt $d(x, x_0) \leq r$ und der Grenzwert x liegt in $\overline{B}(x_0, r)$. Satz 2.18 zeigt nun die erste Behauptung. Die zweite folgt aus der Offenheit von $B(x, r(x)) \subseteq \overline{B}(x_0, r)$ für $x \in \overline{B}(x_0, r)$, siehe Teil a). $\square$

c) Es ist klar, dass die Menge M selbst offen und (wegen Satz 2.18) abgeschlossen ist. Somit ist auch ihr Komplement $\emptyset$ offen und abgeschlossen.

d) In $\mathbb{R}$ ist $J = (0, 1]$ weder offen noch abgeschlossen, aber $(0, 1]$ ist eine Umgebung von $\frac{1}{2}$.

BEWEIS. Die erste Behauptung folgt aus Satz 2.18, da die Zahlen $\frac{1}{n} \in J$ gegen $0 \notin J$ und $y_n = 1 + \frac{1}{n} \notin J$ gegen $1 \in J$ konvergieren. Nach a) ist $(1/4, 3/4)$ offen, und es gilt $1/2 \in (1/4, 3/4) \subseteq J$. Dies zeigt die zweite Behauptung. $\square$

e) $\mathbb{Z}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

BEWEIS. Wenn eine Folge (x_n) aus $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ gegen ein x konvergiert, dann ist sie eine Cauchyfolge. Deswegen liegen ab einem $N \in \mathbb{N}$ alle Glieder x_n im Intervall

$[x_N - \frac{1}{2}, x_N + \frac{1}{2}]$. Also muss $x_n = x_N$ für alle $n \geq N$ und damit $x = x_N \in \mathbb{Z}$ gelten. Somit folgt die Behauptung wieder aus Satz 2.18. $\square$

f) Sei $E = C([0, 1])$ versehen mit der Supremumsnorm. Dann sind $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ abgeschlossen und $D = \{f \in E \mid \forall t \in [0, 1] : f(t) > 0\}$ offen in E .

BEWEIS. Die Folge (f_n) aus F konvergiere in E gegen eine Funktion f . Dann strebt $f_n(0) = 0$ gegen $f(0)$, sodass $f(0) = 0$ ist und auch f in E liegt. Satz 2.18 zeigt nun die Abgeschlossenheit von F .

Sei $f \in D$. Nach Korollar 4.25 aus Analysis 1 ist $\min_{t \in [0, 1]} f(t) =: r > 0$ positiv. Sei $g \in B(f, r)$. Es gilt also $\|f - g\|_\infty < r$. Wir erhalten damit die Ungleichung

$$g(t) = f(t) + g(t) - f(t) \geq r - \|g - f\|_\infty > 0$$

für alle $t \in [0, 1]$. Also liegt g in D und somit ist $B(f, r)$ in D enthalten; d.h., D ist offen. $\square$

Im nächsten Satz klären wir, wie sich die obigen Begriffe sich mit mengentheoretischen Operationen (neben der Komplementbildung) vertragen.

SATZ 2.20. *Sei M ein metrischer Raum. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) *Die Vereinigung beliebig vieler offener Teilmengen und der Durchschnitt endlich vieler offener Teilmengen von M sind wieder offen in M .*

b) *Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Teilmengen und die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Teilmengen von M sind wieder abgeschlossen in M .*

BEWEIS. a) 1) Sei $\mathcal{O}$ eine Menge offener Teilmengen O von M . Wähle

$$x \in V := \bigcup_{O \in \mathcal{O}} O := \{y \in M \mid \exists \tilde{O} \in \mathcal{O} : y \in \tilde{O}\}.$$

Es gibt also eine Menge $\tilde{O} \in \mathcal{O}$ mit $x \in \tilde{O}$ und somit, wegen der Offenheit von $\tilde{O}$, einen Radius $r > 0$ mit $B(x, r) \subseteq \tilde{O}$. Da $\tilde{O}$ in V liegt, folgt die Offenheit von V .

2) Seien $O_1, \dots, O_n$ offene Teilmengen von M . Wähle $x \in D := O_1 \cap \dots \cap O_n$. Dann gibt es für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ einen Radius $r_k > 0$ mit $B(x, r_k) \subseteq O_k$. Setze $\rho = \min\{r_1, \dots, r_n\} > 0$. Damit erhalten wir die Inklusionen

$$B(x, \rho) \subseteq B(x, r_1) \cap \dots \cap B(x, r_n) \subseteq D$$

und damit die Offenheit von D .

b) Sei $\mathcal{A}$ eine Menge abgeschlossener Teilmengen A von M . Sei $\mathcal{O}$ die Menge der Komplemente $O = M \setminus A$ für ein A aus $\mathcal{A}$. Diese Komplemente sind offen. Weiter schließen wir

$$\begin{aligned} B &:= \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A := \{x \in M \mid \forall A \in \mathcal{A} : x \in A\} \\ &= \{x \in M \mid \forall O \in \mathcal{O} : x \notin O\} = M \setminus \left(\bigcup_{O \in \mathcal{O}} O \right). \end{aligned}$$

Gemäß Teil a) ist somit die Menge B abgeschlossen. Den zweiten Teil von Behauptung b) zeigt man ähnlich. $\square$

Im obigen Satz kann man auf das Adjektiv ‘endlich’ nicht verzichten. So ist etwa die Menge $O_n = (0, 1 + \frac{1}{n})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ offen in $\mathbb{R}$, aber $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n = (0, 1]$ ist es nicht. Ebenso sind alle $A_n = [0, 1 - \frac{1}{n}]$ abgeschlossen, aber $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = [0, 1)$ ist nicht abgeschlossen. (Siehe Beispiel 2.19.)

Im Kontext von z.B. $\mathbb{R}^2$ mit der 2-Norm suggerieren die Beispiele 2.19 a) und b), dass eine offene Menge keinen ‘Randpunkt’ besitzt und der ‘Rand’ stets Teil einer abgeschlossenen Menge ist. Tatsächlich lassen sich diese Vermutungen in einem metrischen Raum zeigen, wenn man nur die richtigen Konzepte einführt. Diese liefern uns ferner zu einer gegebenen Menge N eine offene Teilmenge und eine abgeschlossene Obermenge, die möglichst ‘wenig’ von N ‘abweichen’.

DEFINITION 2.21. Seien M ein metrischer Raum und N eine nichtleere Teilmenge von M . Wir definieren

- a) das Innere von N durch $N^\circ = \bigcup \{O \subseteq N \mid O \text{ offen in } M\}$,
- b) den Abschluss von N durch $\bar{N} = \bigcap \{A \subseteq M \mid N \subseteq A, A \text{ abgeschlossen in } M\}$,
- c) den Rand von N durch $\partial N = \bar{N} \setminus N^\circ = \bar{N} \cap (M \setminus N^\circ)$.

Wenn $\bar{N} = M$ ist, so heißt N dicht in M . Ein Element $x \in N^\circ$ ist ein innerer Punkt von N , und $x \in \bar{N}$ nennt man Berührungspunkt von N . Weiter ist $x \in M$ ein Häufungspunkt von N , wenn es Punkte x_n aus $N \setminus \{x\}$ mit $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$ gibt. Ein Element $x \in N$, das kein Häufungspunkt von N ist, heißt isoliert (in N).

Offenbar gelten $N^\circ \subseteq N \subseteq \bar{N}$. Im obigen Rahmen ist $x \in N$ genau dann isoliert in N , wenn es einen Radius $r_0 > 0$ mit $B(x, r_0) \cap N = \{x\}$ gibt. (Vergleiche Bemerkung 4.2 in Analysis 1.)

Wir charakterisieren nun die obigen, etwas unhandlichen Begriffe z.B. mittels Folgenkonvergenz. Für Teilmengen $A, B \subseteq M$ mit $A \cap B = \emptyset$ schreiben wir auch $A \dot{\cup} B$ statt $A \cup B$.

SATZ 2.22. Seien M ein metrischer Raum und $\emptyset \neq N \subseteq M$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

- a) N° ist die größte in M offene Teilmenge von N . Die Menge N ist genau dann in M offen, wenn $N = N^\circ$ ist. Weiter gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} N^\circ &= \{x \in M \mid \exists r > 0 \text{ mit } B(x, r) \subseteq N\} =: N_1 \\ &= \{x \in M \mid \nexists (x_n) \text{ in } M \setminus N \text{ mit } x_n \rightarrow x \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}\} =: N_2. \end{aligned}$$

- b) $\bar{N}$ ist die kleinste in M abgeschlossene Obermenge von N . Die Menge N ist genau dann in M abgeschlossen, wenn $N = \bar{N}$ ist. Wir haben $\bar{N} = N^\circ \dot{\cup} \partial N$,

$$\bar{N} = \{x \in M \mid \exists x_n \in N \text{ mit } x_n \rightarrow x \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}\} =: N_3.$$

- c) ∂N ist abgeschlossen in M und

$$\partial N = \{x \in M \mid \exists x_n \in N, y_n \in M \setminus N \text{ mit } x_n \rightarrow x \text{ und } y_n \rightarrow x \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}\}.$$

- d) N genau dann dicht in M , wenn es für jedes $x \in M$ eine Folge (x_n) in N gibt, die für $n \rightarrow \infty$ gegen x konvergiert.

BEWEIS. a) Die Menge N° ist nach ihrer Definition 2.21 und Satz 2.20 offen. Gemäß dieser Definition ist N° in N enthalten und jedes offene $O \subseteq N$ liegt in N° . Insbesondere ist N genau dann offen, wenn $N = N^\circ$ ist.

Um die beiden Gleichungen in a) zu zeigen, wählen wir zunächst einen Punkt $x \in N_1$. Es gibt also einen Radius $r > 0$ mit $B(x, r) \subseteq N$. Nach dem bisher Gesagten liegen $B(x, r)$ und somit auch x in N° . Es folgt die Inklusion $N_1 \subseteq N^\circ$. Sei nun $x \in N^\circ$. Aufgrund von Definition 2.21 ist dann x ein Element einer offenen Menge $O \subseteq N$. Satz 2.18 impliziert somit, dass x in N_2 und damit N° in N_2 enthalten sind. Sei schließlich $x \notin N_1$. Dann finden wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in (M \setminus N) \cap B(x, 1/n)$. Also konvergiert (x_n) gegen x und somit liegt x auch nicht in N_2 . Wir haben Teil a) gezeigt.

b) Die ersten beiden Teilaussagen beweist man wie in Behauptung a). Die dritte folgt direkt aus der Definition 2.21 des Randes. Die Gleichungen in Teil a) liefern ferner die Identität $N_3 = M \setminus (M \setminus N)^\circ$. Folglich ist N_3 abgeschlossen. Weiter liegt offenbar N in N_3 . Aus der ersten Teilaussage ergibt sich damit die Inklusion $\overline{N} \subseteq N_3$. Sei ferner $x \in N_3$. Dann gibt es eine Folge (x_n) in N , die gegen x strebt. Aus Satz 2.18 schließen wir nun, dass x in jeder abgeschlossenen Obermenge A von N liegt. Wegen Definition 2.21 muss also x in $\overline{N}$ enthalten sein. Demnach gilt b).

Die Aussagen c) und d) folgen aus der Definition des Randes, Satz 2.20 und den Teilen a) und b). $\square$

Wir illustrieren die obigen Begriffe wieder mit einigen typischen Beispielen.

BEISPIEL 2.23. a) Seien X ein normierter Vektorraum, $x \in X$ und $r > 0$. Dann gelten die Gleichungen

$$\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r), \quad \overline{B}(x, r)^\circ = B(x, r) \quad \text{und} \quad \partial B(x, r) = \partial \overline{B}(x, r) = S(x, r).$$

Also ist $S(x, r)^\circ$ leer, $B(x, r)$ ist offen und nicht abgeschlossen und die Mengen $\overline{B}(x, r)$ und $S(x, r)$ sind abgeschlossen und nicht offen.

BEWEIS. Satz 2.22 sowie die Beispiele 2.19 a) und b) liefern die Relationen

$$B(x, r) \dot{\cup} \partial B(x, r) = \overline{B}(x, r) \subseteq \overline{B}(x, r).$$

Wähle nun ein Element y aus $S(x, r) = \overline{B}(x, r) \setminus B(x, r)$. Dann liegt die Vektoren $y_n := y - \frac{1}{n}(y - x)$ in $B(x, r)$ (da $\|y_n - x\| = (1 - \frac{1}{n})\|y - x\| < r$ ist) und konvergieren gegen y für $n \rightarrow \infty$. Entsprechend sind die Punkte $z_n := y + \frac{1}{n}(y - x)$ keine Elemente von $\overline{B}(x, r)$ und $B(x, r)$, und sie streben auch gegen y . Mittels Satz 2.22 schließen wir zunächst, dass y in $\partial B(x, r)$ enthalten ist. Daraus folgt die Inklusion $\overline{B}(x, r) \subseteq B(x, r) \dot{\cup} \partial B(x, r)$. Mit der oben abgesetzten Formel erhalten wir dann die erste Behauptung. Ferner sehen wir, dass y nicht im Innern von $\overline{B}(x, r)$ liegt, sodass dieses eine Teilmenge von $B(x, r)$ sein muss. Somit gilt die zweite Behauptung wegen Satz 2.22 a). Die dritte Aussage ergibt sich schließlich aus den ersten beiden und der Definition 2.21 des Randes. $\square$

b) In $\mathbb{R}$ gelten die Beziehungen $(0, 1]^\circ = (0, 1)$ und $\overline{(0, 1]} = [0, 1]$ auf Grund der jeweils ersten Aussagen in Satz 2.22 a) bzw. b) sowie Beispiel 2.19 d). Diese Gleichungen implizieren dann die Relation $\partial(0, 1] = \{0, 1\}$.

c) Nach Beispiel 2.19 ist $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ abgeschlossen, woraus die Gleichung $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ folgt. Da $B_{\mathbb{R}}(k, 1) \cap \mathbb{Z} = \{k\}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt, ist jeder Punkt von $\mathbb{Z}$ isoliert. Damit ist $\mathbb{Z}^\circ$ leer und $\mathbb{Z}$ gleich seinem Rand.

Wir versehen $\mathbb{Z}$ mit der Metrik $d(k, l) = |k - l|$. Dann ergeben sich

$$\overline{B_{\mathbb{Z}}}(k, 1) = \{k - 1, k, k + 1\} \neq \{k\} = B_{\mathbb{Z}}(k, 1) = \overline{B_{\mathbb{Z}}}(k, 1).$$

Man beachte den Gegensatz zur Vektorraumsituation in Teil a). Im übrigen konvergieren in $\mathbb{Z}$ nur irgendwann konstante Folgen.

d) Nach Beispiel 3.18 in Analysis 1 gibt es für jede reelle Zahl x Brüche q_n , die gegen x streben. Somit ist $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$. Ferner liegen für jeden Bruch q die Zahlen $q + \sqrt{2}/n$ nicht in $\mathbb{Q}$ und konvergieren gegen q . Also ist $\mathbb{Q}^\circ$ leer, sodass der Rand $\partial\mathbb{Q}$ gleich der ‘viel größeren’ Menge $\mathbb{R}$ ist.

e) Sei $M = [0, 1) \cup (2, 3]$ versehen mit $d(x, y) = |x - y|$. Nach Satz 2.18 sind die Teilmengen $[0, 1)$ und $(2, 3]$ in M abgeschlossen und somit als Komplemente auch offen in M . Insbesondere gilt $[0, 1) = [0, 1)^\circ = \overline{[0, 1)}$ in M – natürlich nicht in $\mathbb{R}$!

f) In $E = (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ hat $F = \{f \in E \mid \forall t \in [0, 1] : f(t) > 0\}$ den Abschluss $\overline{F} = \{f \in E \mid \forall t \in [0, 1] : f(t) \geq 0\} =: G$.

BEWEIS. Die Folge (f_n) aus F konvergiere in E gegen eine Funktion f . Dann streben für jedes $t \in [0, 1]$ die Zahlen $f_n(t) > 0$ für $n \rightarrow \infty$ gegen $f(t)$, sodass $f(t)$ nichtnegativ ist und somit f in G liegt. Satz 2.22 b) impliziert nun die Inklusion $\overline{F} \subseteq G$. Sei umgekehrt $g \in G$. Die Funktionen $f_n = g + \frac{1}{n}\mathbb{1}$ liegen dann in F und konvergieren gegen g in E . Also sind g und damit G in $\overline{F}$ enthalten. $\square$

In Analysis 1 hatten wir oft Funktionen betrachtet, die nur auf Teilmengen D von $\mathbb{K}$ definiert sind. Solchen Situationen werden wir auch zukünftig begegnen und benötigen dann die folgenden Begriffe.

DEFINITION 2.24. Seien (M, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq N \subseteq M$. Man definiert die Teilraummetrik auf N durch $d_N(x, y) = d(x, y)$ für $x, y \in N$.

Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $\{0\} \neq Y \subseteq X$ ein Untervektorraum. Die Teilraumnorm auf Y ist dann durch $\|y\|_Y = \|y\|$ für $y \in Y$ gegeben.

Die Eigenschaften in Definitionen 2.14 und 2.1 übertragen sich unmittelbar auf Teilmengen bzw. Untervektorräume, sodass (N, d_N) ein metrischer Raum bzw. $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein normierter Vektorraum ist. Wenn $B \subseteq N$ in (N, d_N) offen (abgeschlossen) ist, dann heißt B *relativ offen* (*relativ abgeschlossen*). Entsprechend geht man bei anderen Begriffen vor. In (N, d_N) kann sich viel ändern; z.B. ist die Menge N nach Beispiel 2.19 c) stets relativ offen und abgeschlossen, ganz unabhängig von ihren Eigenschaften in (M, d) . Siehe auch Beispiel 2.23 c) und e). Die folgenden einfachen Eigenschaften dieser Begriffe verwenden wir gelegentlich.

BEMERKUNG 2.25. Seien (M, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq N \subseteq M$.

a) Für $x \in N$ und $r > 0$ gilt

$$B_N(x, r) = \{y \in N \mid d_N(x, y) = d(x, y) < r\} = B_M(x, r) \cap N.$$

b) Eine Teilmenge D von N ist genau dann relativ offen (abgeschlossen), wenn es so eine in M offene (abgeschlossene) Menge B gibt, dass $D = B \cap N$ ist.

BEWEIS. Sei D relativ offen. Für alle $x \in D$ gibt es dann nach a) so einen Radius $r_x > 0$, dass $B_N(x, r_x) = B_M(x, r_x) \cap N$ in D enthalten ist. Nach Satz 2.20 ist die Menge $B := \bigcup_{x \in D} B_M(x, r_x)$ offen in M , und es folgt $B \cap N = \bigcup_{x \in D} B_N(x, r_x) = D$.

Sei nun $D = B \cap N$ für eine in M offene Menge B . Wähle ein Element x aus D . Da dann x in B liegt, gibt es einen Radius $r > 0$ mit $B_M(x, r) \subseteq B$. Also gelten die Inklusionen $B_N(x, r) = B_M(x, r) \cap N \subseteq B \cap N = D$, und D ist relativ offen.

Eine Menge $D \subseteq N$ ist genau in N abgeschlossen, wenn $N \setminus D$ relativ offen ist. Nach dem bisher Gezeigten ist diese Eigenschaft äquivalent zur Existenz einer in M offenen Menge B mit $N \setminus D = N \cap B$. Diese Gleichung ist gleichwertig zur Identität $D = N \cap (M \setminus B)$, woraus die Behauptung zur Abgeschlossenheit folgt. $\square$

c) Die Menge N ist genau dann offen in M , wenn für alle $D \subseteq N$ die Offenheit von D in (M, d) äquivalent zu der in (N, d_N) ist.

BEWEIS. Indem man D gleich der in (N, d_N) offenen Menge N setzt, sieht man, dass die obige Bedingung die Offenheit von N in M impliziert.

Sei nun N offen in M und $D \subseteq N$. Wenn D relativ offen ist, dann gibt es nach Teil b) eine in M offene Menge B mit $D = N \cap B$, sodass D auch in M offen ist. Wenn D in M offen ist, wählt man $B = D$, und D ist nach b) relativ offen. $\square$

d) Die Menge N ist genau dann abgeschlossen in M , wenn für alle $B \subseteq N$ die Abgeschlossenheit von B in (M, d) äquivalent zu der in (N, d_N) ist. Diese Aussage zeigt man genauso wie Behauptung c). $\diamond$

Also ändert sich Offenheit (zumindest für manche Teilmengen von N) beim Übergang von M zu $N \subseteq M$, außer wenn N selbst offen ist. Entsprechendes gilt für Abgeschlossenheit. Wir illustrieren dies wieder mit einfachen Beispielen.

BEISPIEL 2.26. a) Der erste Quadrant $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\}$ trage die Teilraummetrik $d_Q(x, y) = |x - y|_2$. Nach Satz 2.18 ist Q in $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen, da der Grenzwert (x, y) einer Folge $((x_n, y_n))$ in Q auch nichtnegative Komponenten hat. Der Viertelkreis

$$B(0, 1) \cap Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x, y \geq 0\}$$

ist in Q offen gemäß Bemerkung 2.25 b), aber nicht in $\mathbb{R}^2$ (da etwa $Q \not\ni (-1/n, 0) \rightarrow (0, 0)$ gilt). Hingegen ist $\overline{B}(0, 1) \cap Q$ in Q und $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen. Andererseits ist die (in Q enthaltene) Kugel $B((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{1}{4})$ in Q und in $\mathbb{R}^2$ offen.

b) Die rechte Halbebene $H = \{(x, y) \mid x > 0\}$ ist offen in $\mathbb{R}^2$, da $B((x, y), x)$ für jedes $(x, y) \in H$ in H liegt. Deswegen ist der Kreisbogen $K = H \cap S(0, 1)$ offen in $S(0, 1)$. Er ist nicht abgeschlossen in $S(1, 0)$ oder $\mathbb{R}^2$, da z.B. die Punkte

$(\frac{1}{n}, \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}})$ in K gegen $(0, 1) \in S(0, 1) \setminus K$ konvergieren. Außerdem besitzt K wie $S(0, 1)$ in $\mathbb{R}^2$ keine inneren Punkte, ist also dort nicht offen. $\diamond$

Der nächste Satz erlaubt es oft Vollständigkeit nachzuweisen.

SATZ 2.27. a) Seien (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und N eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge von M . Dann ist (N, d_N) vollständig.

b) Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $Y \neq \{0\}$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Dann ist $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Banachraum.

BEWEIS. Sei (x_n) eine Cauchyfolge in (N, d_N) . Da $d_N(x_n, x_m) = d(x_n, x_m)$ gilt, ist (x_n) auch eine Cauchyfolge in (M, d) und besitzt somit einen Grenzwert x in M . Nach Satz 2.18 liefert die Abgeschlossenheit von N , dass x in N liegt, und somit strebt $d_N(x_n, x) = d(x_n, x)$ gegen 0 für $n \rightarrow \infty$. Also ist (N, d_N) vollständig. Behauptung b) folgt direkt aus a). $\square$

Das folgende Beispiel beinhaltet eine einfache, aber typische Anwendung des obigen Satzes.

BEISPIEL 2.28. Der Untervektorraum $F = \{f \in C([0, 1]) \mid f(0) = 0\}$ von $C([0, 1])$ ist nach Beispiel 2.19 abgeschlossen und somit ein Banachraum für $\|\cdot\|_\infty$. $\diamond$

2.3. Stetigkeit

Wie in Analysis 1 untersuchen wir in diesem Abschnitt Funktionen, die Grenzwerte respektieren, und nennen sie wieder *stetig*.

Zunächst führen einige Standard-Operationen für Abbildungen ein. Seien dazu M, N und P nichtleere Mengen mit nichtleeren Teilmengen $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$, sowie $f : M \rightarrow N$ und $h : N \rightarrow P$ Abbildungen. Dann definieren wir

die *Komposition* von h und f durch $h \circ f : M \rightarrow P$; $(h \circ f)(x) = h(f(x))$,

das *Bild* von A unter f durch $f(A) = \{y \in N \mid \exists x \in A : y = f(x)\}$,

das *Urbild* von B unter f durch $f^{-1}(B) = \{x \in M \mid \exists y \in B : f(x) = y\}$,

die *Einschränkung* von f auf A durch $f|_A : A \rightarrow N$; $f|_A(x) = f(x)$.

Seien Y ein Vektorraum, $\alpha \in \mathbb{K}$ und $f, g : M \rightarrow Y$. Dann erklären wir (punktweise) die Abbildungen

$$f + g : M \rightarrow Y; (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$\alpha f : M \rightarrow Y; (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Man beachte, dass mit diesen Verknüpfungen die Menge aller $f : M \rightarrow Y$ zu einem Vektorraum wird. Wenn speziell $Y = \mathbb{K}$ gilt, so setzen wir

$$fg = f \cdot g : M \rightarrow \mathbb{K}; (fg)(x) = f(x)g(x),$$

$$\frac{1}{f} : \{x \in M \mid f(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{K}; \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Sei $Y = \mathbb{R}$. Dann schreiben wir $f \leq g$, wenn für alle $x \in M$ die Ungleichung $f(x) \leq g(x)$ gilt. Entsprechend definiert man die Relationen $f < g$ oder $f \geq 0$.

In den Spezialfällen $M = \{1, \dots, m\}$ bzw. $M = \mathbb{N}$ decken wir damit auch Vektoren $y = (y_1, \dots, y_m) \in N^m$ und Folgen (y_n) in N ab (wobei $y_n = f(n)$).

Wir verallgemeinern Definitionen 4.3 und 4.8 aus Analysis 1 auf metrische Räume.

DEFINITION 2.29. Für metrische Räume M und N führen wir die folgenden Begriffe ein.

a) Seien $D \subseteq M$, $f : D \rightarrow N$, $x_0 \in M$ ein Häufungspunkt von D und $y_0 \in N$. Wir sagen, dass $f(x)$ für $x \rightarrow x_0$ gegen den Grenzwert y_0 in N konvergiert, wenn für **jede** Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \rightarrow x_0$ in M für $n \rightarrow \infty$ die Bildfolge $(f(x_n))$ in N gegen y_0 strebt. Man schreibt dann

$$y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{oder} \quad f(x) \rightarrow y_0 \quad (x \rightarrow x_0).$$

b) Seien $f : M \rightarrow N$ und $x_0 \in M$. Die Funktion f ist bei x_0 stetig, wenn für **jede** Folge (x_n) in $M \setminus \{x_0\}$, die in M gegen x_0 strebt, die Bildfolge $(f(x_n))$ in N den Grenzwert $f(x_0)$ besitzt. Wenn x_0 auch ein Häufungspunkt von M ist, so bedeutet dies gerade, dass die Aussage

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt. Wenn f bei jedem $x_0 \in M$ stetig ist, so heißt f stetig (auf M). Man setzt $C(M, N) = \{f : M \rightarrow N \mid f \text{ stetig}\}$.

Wir verstehen Teil b) so, dass f in isolierten Punkten x_0 stets stetig ist. Man kann in Teil b) gleichwertig alle Folgen (x_n) in M mit $x_n \rightarrow x_0$ betrachten. (Für $x_{n_j} = x_0$ gilt ja sowieso $f(x_{n_j}) = f(x_0)$.)

Wir zeigen zunächst die natürlichen Permanenzeigenschaften der Stetigkeit. Ähnlich wie in Satz 4.6 von Analysis 1 kann man auch entsprechende Sätze für Grenzwerte zeigen, was wir aber nicht ausführen.

SATZ 2.30. Es seien M , N und P metrische Räume und $x_0 \in M$.

a) Seien $f : M \rightarrow N$ bei x_0 stetig und $h : N \rightarrow P$ bei $f(x_0)$ stetig. Dann ist auch $h \circ f : M \rightarrow P$ bei x_0 stetig.

b) Sei $D \subseteq M$ und $x_0 \in D$. Wenn f bei x_0 stetig ist, so ist dies auch die Einschränkung $f|_D$. Die Umkehrung gilt, wenn D offen ist.

c) Seien Y ein normierter Vektorraum, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $f, g : M \rightarrow Y$ bei x_0 stetig. Dann ist auch $\alpha f + \beta g : M \rightarrow Y$ bei x_0 stetig. Also ist $C(M, Y)$ ein Vektorraum.

d) In Teil c) sei zusätzlich $Y = \mathbb{K}$. Dann sind $fg : M \rightarrow \mathbb{K}$ und, falls $f(x_0) \neq 0$, $\frac{1}{f} : \{x \in M \mid f(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{K}$ bei x_0 stetig.

BEWEIS. a) Es strebe (x_n) in M gegen x_0 für $n \rightarrow \infty$. Nach Voraussetzung konvergieren dann auch die Bilder $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$ und somit auch $h(f(x_n))$ gegen $h(f(x_0))$. Also ist $h \circ f$ bei x_0 stetig.

b) Die Definition impliziert direkt, dass aus der Stetigkeit von f bei x_0 diejenige von $f|_D$ folgt. Sei nun D offen und $f|_D$ stetig. Wenn (x_n) in M gegen x_0 strebt, so liegt auf Grund der Offenheit von D die Folge ab einem Index in D und konvergiert

dann dort gegen x_0 . Somit ergibt sich $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ für $n \rightarrow \infty$, und auch f ist bei x_0 stetig.

Die Aussage c) folgt ähnlich wie a), wobei wir Satz 2.2 benutzen. Teil d) zeigt man wie in Satz 4.12 von Analysis 1 unter Verwendung von Satz 2.32 unten. $\square$

In Teil b) benötigt man die Offenheit von D , wie das Beispiel $f = \mathbb{1}_{[0,1]} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D = [0, 1]$ zeigt. Hier ist f bei $x_0 = 0$ unstetig, aber $f|_D$ ist auf D stetig.

Nach allgemeinen Beispielen, diskutieren wir unten konkrete Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Hier kann man sich den Graphen (als Fläche über Teilmengen des $\mathbb{R}^2$) noch gut veranschaulichen. Das wird schon bei Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ deutlich schwieriger (siehe etwa Beispiel 3.16), aber auch die jetzige Situation ist deutlich komplizierter als in Analysis 1 und sie erfordert oft ein gewisses Geschick. Hier beschränken wir uns auf einfache Vorgehensweisen, mehr findet man in den Übungen.

BEISPIEL 2.31. a) Sei X ein normierter Vektorraum. Dann ist die Norm $N : X \rightarrow \mathbb{R}; N(x) = \|x\|$, stetig.

BEWEIS. Die Folge (x_n) strebe in X gegen x . Die umgekehrte Dreiecksungleichung aus Satz 2.2 impliziert dann die gewünschte Konvergenz

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \square$$

b) Es seien M, N_1 und N_2 metrische Räume, $x_0 \in M$ und $f = (f_1, f_2) : M \rightarrow N_1 \times N_2$. Genau dann ist f bei x_0 stetig, wenn $f_1 : M \rightarrow N_1$ und $f_2 : M \rightarrow N_2$ beide bei x_0 stetig sind. Diese Aussage gilt entsprechend für endliche kartesische Produkte und somit für Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{K}^m$.

BEWEIS. Es gelte $x_n \rightarrow x_0$ in M . Nach Beispiel 2.15 d) konvergiert $(f(x_n))$ genau dann in $N_1 \times N_2$, wenn $(f_1(x_n))$ in N_1 und $(f_2(x_n))$ in N_2 konvergieren. Also gilt der erste Teil. Der zweite wird genauso bewiesen. $\square$

c) Sei M ein metrischer Raum. Dann ist die Metrik $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto d(x, y)$, stetig.

BEWEIS. Es konvergiere $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$ in M für $n \rightarrow \infty$. Mittels der Dreiecksungleichung (M3) berechnen wir

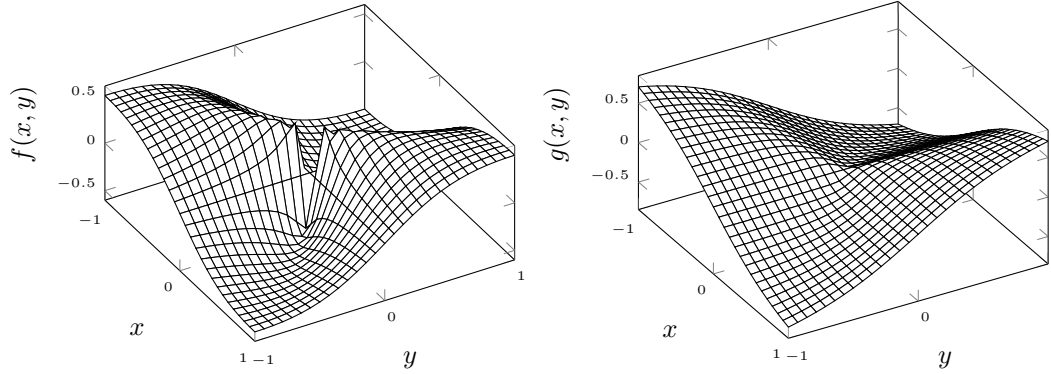
$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) - d(x, y) &\leq d(x_n, x) + d(x, y_n) - d(x, y) \\ &\leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) - d(x, y) \\ &= d(x_n, x) + d(y, y_n) \rightarrow 0, \\ d(x, y) - d(x_n, y_n) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) - d(x_n, y_n) \\ &= d(x, x_n) + d(y_n, y) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

sodass $|d(x_n, y_n) - d(x, y)|$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt. $\square$

d) Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ seien durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

gegeben. Dann ist g stetig und f nur bei $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Der Grenzwert von $f(x, y)$ für $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ existiert nicht. Die folgenden Schaubilder zeigen das Verhalten der Funktionen f und g auf $[-1, 1]^2$.



BEWEIS. 1) Wir beginnen mit den Punkten $(x, y) \neq (0, 0)$, die leicht mit allgemeiner Theorie behandelt werden können. Wir setzen $h_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; h_1(x, y) = x$. Aus $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ in $\mathbb{R}^2$ folgt die Konvergenz $h_1(x_n, y_n) = x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$. Also ist h_1 stetig. Ebenso zeigt man die Stetigkeit von $h_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; h_2(x, y) = y$. Nach Satz 2.30 c) und d) ist dann die Funktion

$$f|_D = \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2} : D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig, was die Stetigkeit von f für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ impliziert (siehe Satz 2.30 b)). Die Abbildung g behandelt man auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ entsprechend.

2) Sei nun $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Bei g stellt man fest, dass der Zähler quadratisch in x, y ist und der Nenner nur linear. Da der Zähler schneller gegen 0 strebt, kann man Konvergenz von f gegen 0 erwarten. Für den Beweis verwenden wir die Youngsche Ungleichung (Beispiel 5.27 in Analysis 1 mit $p = 2 = p'$), um den Zähler durch eine Funktion in $|(x, y)|_2$ abzuschätzen, sodass er mit dem singulären Nenner verrechnet werden kann. Wir erhalten damit

$$|g(x, y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0,$$

und folglich ist g auch bei $(0, 0)$ stetig.

Hingegen ist f im Zähler und Nenner quadratisch in x, y , sodass die Stetigkeit erst einmal unklar ist. Hier sehen wir, dass f auf Ursprungsgeraden $y = \alpha x$ konstant ist, genauer gesagt gilt $f(x, \alpha x) = \alpha(1 + \alpha^2)^{-1} =: c_\alpha$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und (feste) $\alpha \in \mathbb{R}$. Diese Funktionswerte konvergieren also für $x \rightarrow 0$ gegen c_α , was eine beliebige Zahl in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ist. Deswegen divergiert $f(x, y)$ für $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. $\square$

e) Wir geben etwas kompliziertere Varianten der obigen Überlegungen an. Sei $f = \mathbb{1}_S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ für die Spirale $S = \{v(s) = (1-s)(\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)) \mid s \in [0, 1)\}$. Hier gilt $|v(s)|_2 = 1-s$, $v(0) = (1, 0)$, $v(s) \rightarrow (0, 0)$ für $s \rightarrow 1$ und v windet sich einmal um $(0, 0)$. Damit ist die Funktion $f = \mathbb{1}_S$ bei $(0, 0)$ unstetig (da $f(v(s)) = 1$

für $s \in [0, 1)$ und $f(0, 0) = 0$). Aber auf Ursprungshalbgeraden $y = \alpha x$ mit $x \geq 0$ ist $f(x, \alpha x)$ bis auf ein $x_\alpha > 0$ konstant gleich 0, konvergiert also gegen 0.

In $\mathbb{R}$ kann man sich einem Punkt nur von links und rechts annähern, in $\mathbb{R}^2$ hingegen in unendlich vielfältiger Weise auf Geraden, Spiralen usw.!

Wir betrachten ferner die Funktion

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy^2)}{x^2 + |y|}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

Ohne den Sinus wäre der Zähler kubisch in x, y , der Nenner ist (höchstens) quadratisch. Um den Sinus zu beseitigen, verwenden wir die Ungleichung $|\sin r| \leq |r|$ für $r \in \mathbb{R}$. Wegen $-\sin r = \sin(-r)$, reicht es sie für $r \geq 0$ zu zeigen. Die Funktion $\varphi(r) = r - \sin r$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ erfüllt $\varphi(0) = 0$ und wächst wegen $\varphi'(r) = 1 - \cos r \geq 0$. Also gilt die Ungleichung.

Sei nun $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Wir können annehmen, dass $|x|, |y| \leq 1$ ist. Wir nutzen nun die Youngsche Ungleichung für $p = 3$ und $p' = 3/2$ (mit $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$), sowie Satz 2.8. Damit folgt

$$|g(x, y)| \leq \frac{|x|y^2}{x^2 + |y|} \leq \frac{\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}y^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{|(x, y)|_3^3}{|(x, y)|_2^2} \leq |(x, y)|_2 \rightarrow 0.$$

f) Auf $E = C([a, b])$ mit der Supremumsnorm ist $Q : E \rightarrow E$; $Qu = u^2$, stetig.

BEWEIS. Zunächst ist Q wohldefiniert, da mit u auch u^2 stetig ist. Die Folge (u_n) konvergiere in E gegen die Funktion u . Satz 2.2 liefert dann die Beschränktheit der Folge, sodass $c := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_\infty$ endlich ist. Wir schließen nun

$$\begin{aligned} \|Q(u_n) - Q(u)\|_\infty &= \|u_n^2 - u_n u + u_n u - u^2\|_\infty \leq \|u_n(u_n - u)\|_\infty + \|(u_n - u)u\|_\infty \\ &\leq \|u_n\|_\infty \|u_n - u\|_\infty + \|u_n - u\|_\infty \|u\|_\infty \leq (c + \|u\|_\infty) \|u_n - u\|_\infty \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Im nächsten Satz erweitern wir die ε - δ -Charakterisierung der Stetigkeit aus Analysis 1 auf metrische Räume und zu einer globalen Aussage: Stetigkeit bedeutet, dass jede offene Menge im Bildraum eine offene Urbildmenge unter f besitzt.

SATZ 2.32. *Es seien M und N metrische Räume, sowie $f : M \rightarrow N$.*

a) *Sei $x_0 \in M$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- 1) *Die Abbildung f ist stetig bei x_0 .*
- 2) *Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es so einen Radius $\delta = \delta_{\varepsilon, x_0} > 0$, dass für alle x in der Kugel $B_M(x_0, \delta)$ die Ungleichung $d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ gilt.*
- 3) *Wenn V eine Umgebung von $f(x_0)$ in N ist, dann ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x_0 in M .*

b) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

- 1) *Die Abbildung f ist stetig.*
- 2) *Wenn $O \subseteq N$ in N offen ist, dann ist das Urbild $f^{-1}(O)$ offen in M .*
- 3) *Wenn $A \subseteq N$ in N abgeschlossen ist, dann ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in M .*

BEWEIS. a) Es gelte die Aussage $\neg 3)$. Dann gibt es also so eine Umgebung V_0 von $f(x_0)$ in N , dass $f^{-1}(V_0)$ keine Umgebung von x_0 in M ist. Damit existieren Punkte x_n mit $f(x_n) \notin V_0$, die in M für $n \rightarrow \infty$ gegen x_0 konvergieren. Andererseits haben wir einen Radius $r > 0$ mit $B(f(x_0), r) \subseteq V_0$. Deswegen kann die Folge $(f(x_n))$ nicht gegen $f(x_0)$ streben, sodass f bei x_0 nicht stetig ist und 1) falsch ist. Damit haben wir die Implikation ‘1) $\Rightarrow$ 3)’ gezeigt.

Wir nehmen, dass die Eigenschaft 3) erfüllt ist. Sei $\varepsilon > 0$. Für die Umgebung $V := B(f(x_0), \varepsilon)$ von $f(x_0)$ liefert 3), dass auch $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x_0 ist. Somit gibt es einen Radius $\delta > 0$ mit $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(V)$. Für $x \in B(x_0, \delta)$ liegt also $f(x)$ in V , sodass $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ gilt. Aussage 2) ist somit erfüllt.

Schließlich sei 2) wahr. Die Folge (x_n) konvergiere in M gegen x_0 . Sei $\delta = \delta_{\varepsilon, x_0} > 0$ die Zahl aus 2). Dann gibt es so einen Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ die Ungleichung $d(x_n, x_0) \leq \delta/2 < \delta$ gilt. Mit 2) folgt nun die Relation $d(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$, sodass die Bilder $f(x_n)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen $f(x_0)$ streben. Damit ist die Eigenschaft 1) gezeigt.

b) Es gelte Aussage 1). Sei $A \subseteq N$ abgeschlossen. Wähle Punkte $x_n \in f^{-1}(A)$, die gegen ein x in M konvergieren. Da f gemäß 1) stetig ist, streben die Bilder $f(x_n) \in A$ gegen $f(x)$. Auf Grund der Abgeschlossenheit von A liegt dann auch $f(x)$ in A , siehe Satz 2.18. Dies heißt gerade, dass x in $f^{-1}(A)$ enthalten ist. Deswegen ist nach Satz 2.18 die Menge $f^{-1}(A)$ abgeschlossen, und 3) gilt.

Es sei nun 3) erfüllt. Sei $O \subseteq N$ offen. Dann ist $A := N \setminus O$ abgeschlossen. Laut 3) gilt dies auch für das Urbild $f^{-1}(A)$. Somit ist die Menge

$$f^{-1}(O) = \{x \in M \mid f(x) \in O = N \setminus A\} = \{x \in M \mid f(x) \notin A\} = M \setminus f^{-1}(A)$$

offen. Also haben wir die Eigenschaft 2) gezeigt.

Wir nehmen schließlich an, dass Aussage 2) gilt. Sei $x_0 \in M$ und V eine Umgebung von $f(x_0)$ in N . Dann gibt es einen Radius $r > 0$ mit $B(f(x_0), r) \subseteq V$. Nach 2) ist auch $U := f^{-1}(B(f(x_0), r))$ offen in M . Da ferner x_0 in U liegt, ist für eine Zahl $\rho > 0$ die Kugel $B(x_0, \rho)$ in $U \subseteq f^{-1}(V)$ enthalten. Somit ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x_0 . Behauptung a) liefert dann die Stetigkeit von f bei x_0 . Da $x_0 \in M$ beliebig ist, ist f auf ganz M stetig. Folglich ist auch Aussage 1) wahr. $\square$

Man beachte, dass eine konstante (und damit stetige) Funktion mit Bildraum $\mathbb{R}$ jede nichtleere offene Menge auf eine nicht offene Menge abbildet.

Wir werden den obigen, sehr flexiblen Satz häufig verwenden. Das nächste Beispiel zeigt, wie man mit ihm offene oder abgeschlossene Mengen erkennt. Dabei nutzt man aus, dass man Stetigkeit oft leicht nachweisen kann.

BEISPIEL 2.33. Die Halbellipse $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1 \text{ und } y > 0\}$ ist offen in $\mathbb{R}^2$, und $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \text{ und } y \geq 0\}$ ist abgeschlossen.

BEWEIS. Wie in Beispiel 2.31 d) sieht man, dass die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x, y) = \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2$, und $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; $g(x, y) = y$, stetig sind. Wegen der Offenheit

der Mengen $(-\infty, 1)$ und $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, ist auch $D = f^{-1}((-\infty, 1)) \cap g^{-1}(\mathbb{R}_+)$ gemäß der Sätze 2.32 und 2.20 offen. Die zweite Behauptung zeigt man genauso. $\square$

Wir führen zwei wichtige Unterklassen stetiger Funktionen ein. Bei der ersten fordert man (wie in Analysis 1 im Falle $M = N = \mathbb{R}$), dass der Radius δ in Satze 2.32 a2) unabhängig von $x_0 \in M$ gewählt werden kann.

DEFINITION 2.34. *Es seien M und N metrische Räume und $f : M \rightarrow N$.*

a) *Die Funktion f heißt gleichmäßig stetig, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x, y \in M \text{ mit } d_M(x, y) \leq \delta_\varepsilon : d_N(f(x), f(y)) \leq \varepsilon. \quad (2.8)$$

b) *Die Funktion f heißt Lipschitz stetig mit Konstante $L > 0$, wenn*

$$d_N(f(x), f(y)) \leq L d_M(x, y) \quad (2.9)$$

für alle $x, y \in M$ gilt.

Wir grenzen diese Begriffe voneinander ab.

BEMERKUNG 2.35. a) Eine Lipschitz stetige Funktion ist auch gleichmäßig stetig. (Wähle $\delta_\varepsilon = \varepsilon/L$ in (2.8).) Wegen Satz 2.32 folgt die Stetigkeit aus der gleichmäßigen Stetigkeit.

b) Die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \sqrt{x}$, ist gleichmäßig stetig (nach Theorem 4.19 in Analysis 1), aber nicht Lipschitz stetig, da

$$\sup_{x \in (0, 1]} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \sup_{x \in (0, 1]} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty \quad \text{gilt.}$$

c) Die Funktionen $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{1}{x}$, und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = x^2$, sind stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. (Siehe Beispiel 4.17 in Analysis 1.)

d) Auf einem normierten Vektorraum X ist die Abbildung $N : X \rightarrow \mathbb{R}; N(x) = \|x\|$, ist Lipschitz stetig mit $L = 1$, denn es gilt $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ nach der umgekehrten Dreiecksungleichung in Satz 2.2.

e) Seien (M, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$. Dann ist die Funktion $d_A : M \rightarrow \mathbb{R}; d_A(x) = \inf_{a \in A} d(x, a)$, Lipschitz stetig mit Konstante $L = 1$. (Sie gibt den Abstand von x zu A an.) Sei A abgeschlossen. Dann liegt x genau dann in A , wenn $d_A(x) = 0$.

BEWEIS. Seien $x, y \in M$. Wir können annehmen, dass $d_A(x) \geq d_A(y)$ ist. (Sonst vertausche x und y .) Wir erinnern zuerst an Beispiel 2.31 c). Für $a \in A$ gilt ähnlich wie dort

$$d(x, a) - d(y, a) \leq d(x, y) + d(y, a) - d(y, a) \leq d(x, y).$$

Die rechte Seite hat schon die gewünschte Form, aber links können wir nur im ersten Term direkt zum Infimum über $a \in A$ übergehen, beim zweiten verhindert dies das Minus. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein Punkt $a \in A$ mit $d_A(y) \geq d(y, a) - \varepsilon$. Die obige Rechnung impliziert nun

$$|d_A(x) - d_A(y)| = d_A(x) - d_A(y) \leq d(x, a) - d(y, a) + \varepsilon \leq d(x, y) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist folgt die erste Behauptung.

Für $x \in A$ gilt natürlich $d_A(x) = 0$ (nehme $a = x$). Sei nun A abgeschlossen und $d_A(x) = 0$. Dann gibt es Punkte $a_n \in A$ mit $d(x, a_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Wegen der Abgeschlossenheit liegt somit der Grenzwert x auch in A . $\square$

Eine wichtige Klasse Lipschitz stetiger Funktionen sind lineare Abbildungen auf endlichdimensionalen Vektorräumen. Wir wiederholen zunächst einige grundlegende Begriffe und einfache Eigenschaften aus der linearen Algebra, ohne Zitate anzugeben. Für Vektorräume V und W über $\mathbb{K}$ definiert man den Vektorraum der linearen Abbildungen

$$L(V, W) = \{T : V \rightarrow W \mid T \text{ linear}\}$$

versehen mit der üblichen Summe und skalaren Multiplikation von vektorwertigen Funktionen, wobei $L(V, V) =: L(V)$ ist. Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen nennt man auch *Operatoren*. Man schreibt hier Tx statt $T(x)$ und ST statt $S \circ T$ für $T \in L(V, W)$, $S \in L(W, Z)$, $x \in V$ und einem Vektorraum Z . Es gilt $T0 = 0$.

Es sei $e_k = (0 \cdots 0 \ 1 \ 0 \ \cdots 0)^\top \in \mathbb{K}^m$ der k -te Einheitsvektor mit einer 1 an der k -ten Stelle. Für $T \in L(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^l)$, $j \in \{1, \dots, l\}$ und $k \in \{1, \dots, m\}$ setzen wir $a_{jk} = [Te_k]_j$ für die j -te Komponente von Te_k . Für $x = (x_1 \cdots x_m)^\top \in \mathbb{K}^m$ folgen dann $x = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m$ und

$$Tx = \sum_{k=1}^m x_k Te_k = \left(\sum_{k=1}^m a_{jk} x_k \right)_{j=1, \dots, l}.$$

Auf diese Weise identifizieren wir meist $T \in L(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^l)$ mit der $l \times m$ -Matrix $[a_{jk}]_{\substack{j=1, \dots, l \\ k=1, \dots, m}} \in \mathbb{K}^{l \times m}$. Die lineare Abbildung T ist genau dann bijektiv, wenn $m = l$ und die Matrix $[a_{jk}]$ invertierbar ist, es also eine $m \times m$ Matrix R mit $[a_{jk}]R = R[a_{jk}] = I$ gibt. Dabei ist $I = I_m$ die $m \times m$ Einheitsmatrix. Die inverse Abbildung T^{-1} wird dann durch R dargestellt. Wir schreiben auch T statt $[a_{jk}]$ und T^{-1} statt R .

Wir führen nun auf jedem endlichdimensionalen Vektorraum eine Norm ein.

BEMERKUNG 2.36. Sei V ein Vektorraum der Dimension $m \in \mathbb{N}$ mit Basis $\{b_1, \dots, b_m\}$. Für jedes $x \in V$ existieren also eindeutig bestimmte Zahlen $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{K}$, für die $x = x_1 b_1 + \dots + x_m b_m$ gilt. Dabei ist die Abbildung

$$\Phi = \Phi_V : V \rightarrow \mathbb{K}^m; \ x \mapsto (x_1 \ \cdots \ x_m)^\top,$$

bijektiv und linear. Ein Operator $T \in L(V, W)$ für einen zweiten Vektorraum W mit $\dim W = l$, induziert dann die ähnliche Abbildung $\Phi_W T \Phi_V^{-1} : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^l$, die man mit den obigen Bemerkungen als $l \times m$ Matrix darstellen kann.

Wir definieren die Zahl $\|x\| = |\Phi x|_1$ für $x \in V$. Dies liefert eine Norm auf V , da wegen (N1)–(N3) für $|\cdot|_1$ sowie der Injektivität und Linearität von Φ die Aussagen

$$\|x\| = 0 \iff \Phi x = 0 \iff x = 0,$$

$$\begin{aligned}\|\alpha x\| &= |\alpha \Phi x|_1 = |\alpha| |\Phi x|_1 = |\alpha| \|x\|, \\ \|x + y\| &= |\Phi x + \Phi y|_1 \leq |\Phi x|_1 + |\Phi y|_1 = \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gelten. Wir zeigen die Vollständigkeit dieser Norm. Sei (v_n) eine Cauchyfolge in $(V, \|\cdot\|)$. Dann ist (Φv_n) eine Cauchyfolge in $(\mathbb{K}^m, |\cdot|_1)$ und konvergiert dort also nach Satz 2.13 gegen einen Vektor y . Wir setzen $v = \Phi^{-1}y \in V$. Dann strebt $\|v_n - v\| = |\Phi(v_n - v)|_1 = |\Phi v_n - y|_1$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0. $\diamond$

Für endlichdimensionalen Vektorräume V und W können wir nun $L(V, W)$ mit einer kanonischen Norm versehen, die wir im Folgenden verwenden werden, solange nichts anderes gesagt wird.

SATZ 2.37. *Seien V, W, Z endlichdimensionale Vektorräume mit Normen $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|$ usw., $T \in L(V, W)$ und $S \in L(W, Z)$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) *T ist Lipschitz stetig mit der (endlichen) Konstante*

$$\|T\| = \|T\|_{L(V, W)} := \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_W}{\|x\|_V}. \quad (2.10)$$

Also gilt $\|Tx\|_W \leq \|T\| \|x\|_V$ für alle $x \in V$. ($\|\cdot\|_{L(V, W)}$ heißt Operatornorm.)

b) *$\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$ und $\|I\| = 1$ für die Identität $I : V \rightarrow V; x \mapsto x$.*

c) *$L(V, W)$ ist ein Banachraum bezüglich der Operatornorm.*

BEWEIS. Wir lassen die Indizes bei den Normen weg.

a) Seien $\{b_1, \dots, b_m\}$ eine Basis von V , x und y Elemente von V , sowie $x_k \in \mathbb{K}$ mit $x = x_1 b_1 + \dots + x_m b_m$. Dann gilt

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{k=1}^m x_k T b_k \right\| \leq \sum_{k=1}^m |x_k| \|T b_k\| \leq \max_{k \in \{1, \dots, m\}} \|T b_k\| \|x\| \leq \kappa C \|x\|.$$

Hierbei schreiben wir $\kappa > 0$ für das obige Maximum und verwenden die Norm aus Bemerkung 2.36 sowie Satz 2.54 unten, nach dem alle Normen auf endlichdimensionalen Vektorräumen äquivalent sind.³ Damit ist die Operatornorm $\|T\|$ endlich, was die zweite Behauptung in a) impliziert.

Aus der Linearität von T folgt dann die Lipschitz Stetigkeit

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leq \|T\| \|x - y\|.$$

b) Für $x \in V \setminus \{0\}$ liefert Behauptung a) die gewünschte Abschätzung durch

$$\frac{1}{\|x\|} \|STx\| \leq \frac{1}{\|x\|} \|S\| \|Tx\| \leq \frac{1}{\|x\|} \|S\| \|T\| \|x\| = \|S\| \|T\|.$$

Die zweite Aussage ist klar.

c) Seien $T, R \in L(V, W)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $x \in V$. Die Definition der Operatornorm und (N1)–(N3) für die Norm auf W implizieren dann

$$\|T\| = 0 \iff \forall x \neq 0 : \|Tx\| = 0 \iff T = 0,$$

³Der Beweis von Satz 2.54 ist natürlich unabhängig von Satz 2.37 und den folgenden Anwendungen seiner Aussagen.

$$\|\alpha T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\alpha Tx\|}{\|x\|} = |\alpha| \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = |\alpha| \|T\|$$

$$\|R + T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Rx + Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \left(\frac{\|Rx\|}{\|x\|} + \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \right) \leq \|T\| + \|R\|,$$

wobei auch Bemerkung 1.15 f) und Satz 2.31 in Analysis 1 zum Supremum einging. Also ist die Operatornorm eine Norm auf $L(V, W)$. Weil dieser Raum endlichdimensional ist, folgt seine Vollständigkeit aus Satz 2.54 unten. $\square$

Wir diskutieren nun die Operatornorm anhand von Beispielen.

BEISPIEL 2.38. Der Operator $T \in L(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^l)$ besitze die Darstellungsmatrix $[a_{jk}]$, die Räume $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^l$ seien mit der p -Norm versehen und x sei aus $\mathbb{K}^m$. Weiter trage $E = C([0, 1])$ die Supremumsnorm.

a) Für $p = 2$ genügt T den Abschätzungen

$$\|T\| \leq \left(\sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^m |a_{jk}|^2 \right)^{1/2} =: \|T\|_{HS} \leq \sqrt{lm} \max_{\substack{j \in \{1, \dots, l\} \\ k \in \{1, \dots, m\}}} |a_{jk}|,$$

wobei $\|T\|_{HS}$ *Hilbert-Schmidt-Norm* heißt. Die zweite Abschätzung ist klar. Die erste zeigt man mittels der Hölderschen Ungleichung mit $p = 2 = p'$ durch

$$\begin{aligned} |Tx|_2 &= \left(\sum_{j=1}^l \left| \sum_{k=1}^m a_{jk} x_k \right|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^l \left[\left(\sum_{k=1}^m |a_{jk}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^m |x_k|^2 \right)^{1/2} \right]^2 \right)^{1/2} \\ &= \|T\|_{HS} |x|_2 \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{K}^m$. Schon für die Einheitsmatrix $I \in L(\mathbb{K}^2)$ ist $\|I\| = 1 < 2 = \|I\|_{HS}$. Wir erhalten ferner $\|T\|_{HS} \geq |a_{jk}|$ für alle j und k und somit $\|T\|_{HS} \geq \max_{j,k} |a_{jk}|$. Weiter ist $\|T\|_{HS}$ gerade die 2-Norm der a_{jk} als Vektor in $\mathbb{K}^{lm}$.

b) In den Übungen werden die Operatornormen in $L(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^l)$

$$\text{für } p = 1: \quad \|T\| = \max_{k \in \{1, \dots, m\}} \sum_{j=1}^l |a_{jk}| =: \|T\|_S \quad (\text{Spaltensummennorm}),$$

$$\text{für } p = \infty: \quad \|T\| = \max_{j \in \{1, \dots, l\}} \sum_{k=1}^m |a_{jk}| =: \|T\|_Z \quad (\text{Zeilensummennorm})$$

bewiesen. Es gelten $\max_{j,k} |a_{jk}| \leq \|T\|_S \leq l \max_{j,k} |a_{jk}|$ und Analoges für $\|T\|_Z$. Da auf $L(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^l)$ alle Normen äquivalent sind (siehe Satz 2.54 im nächsten Abschnitt), implizieren diese Ungleichungen, dass in $L(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^l)$ die Konvergenz in der Norm und die komponentenweise Konvergenz gleichwertig sind. (Vergleiche Satz 2.9.)

c) Für die Matrizen $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $ST = 0$ und somit $\|ST\|_S = 0 < 1 = \|S\|_S \|T\|_S$. Vergleiche Satz 2.37 c).

d) Es sei $F = C^1([0, 1])$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ versehen. Dann ist die Abbildung $D : F \rightarrow E; Df = f'$, linear und unstetig. Für $f_n(x) = n^{-1/2} \sin(nx)$ gilt etwa

$f_n \rightarrow 0$ in F für $n \rightarrow \infty$, aber $\|f'_n\|_\infty \geq |f'_n(0)| = \sqrt{n}$ für $n \rightarrow \infty$. Insbesondere hat D (in diesem Rahmen) eine unendliche Operatornorm $\|D\| = \sup_{f \neq 0} \|Df\|_\infty / \|f\|_\infty$.

e) Sei $f \in E$. Durch $Tf(t) = \int_0^t f(s) ds$ für $t \in [0, 1]$ definiert man eine lineare und Lipschitz stetige Abbildung $T : E \rightarrow E$, da $Tf \in E$ und

$$\|Tf - Tg\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t (f(s) - g(s)) ds \right| \leq \sup_{t \in [0,1]} \int_0^t |f(s) - g(s)| ds \leq \|f - g\|_\infty$$

für $f, g \in E$ gelten. Der Hauptsatz Theorem 1.10 impliziert weiter, dass Tf in F liegt und $DTf = f$ gilt. Somit ist T injektiv, aber nicht surjektiv. $\diamond$

Die Beispiele d) und e) zeigen frappante Unterschiede zwischen endlich- und unendlichdimensionalen normierten Vektorräumen, die wir aber hier nicht vertiefen.

Seien X ein Banachraum und $x_k \in X$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Setze $s_n = \sum_{k=0}^n x_k$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Für die Konvergenz der Reihe $(s_n)_{n \geq 0}$ in X zeigen wir mittels eines *Majorantenkriteriums* wie in Satz 3.12 aus Analysis 1. Dazu gelte $\|x_k\| \leq b_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und eine Folge (b_k) mit endlicher Reihe $\beta := \sum_{k=0}^\infty b_k < \infty$. Für alle Indizes $n > m \geq 0$ erhalten wir dann

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| \leq \sum_{k=m+1}^n b_k \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Also ist (s_n) eine Cauchyfolge in X und hat somit den Grenzwert

$$\sum_{k=0}^\infty x_k := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x_k$$

in X . Dabei ist die Norm der Reihe $\sum_{k=0}^\infty x_k$ kleiner oder gleich β .

Mittels der *Neumannsche Reihe* zeigen wir nun, dass Invertierbarkeit unter kleinen Störungen erhalten bleibt. Das triviale Beispiel $T = I \in L(V)$ mit $\|I^{-1}\| = 1$ und $S = -I \in L(V)$ mit $\|-I\| = 1$ zeigt, dass die Normschränke im Satz scharf ist.

Satz 2.39. *Seien V ein endlichdimensionaler Banachraum und $T \in L(V)$ bijektiv. Der Operator $S \in L(V)$ erfülle $\|S\| < 1/\|T^{-1}\|$. Dann ist auch $T + S \in L(V)$ bijektiv mit der Inversen*

$$(T + S)^{-1} = T^{-1} \sum_{k=0}^\infty (-ST^{-1})^k =: R.$$

Also ist die Menge der invertierbaren Matrizen in $L(V)$ offen. Aus $\|S\| \leq a/\|T^{-1}\|$ für ein $a \in (0, 1)$ folgt ferner die Abschätzung $\|(T + S)^{-1}\| \leq \|T^{-1}\|/(1 - a)$.

BEWEIS. Wir setzen $q = \|T^{-1}\| \|S\| < 1$. Satz 2.37 impliziert die Abschätzung $\|(-ST^{-1})^k\| \leq (\|S\| \|T^{-1}\|)^k \leq q^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Da $\sum_{k=0}^\infty q^k = 1/(1 - q)$ ist (siehe Beispiel 3.2 in Analysis 1), folgt die Konvergenz in $L(V)$ der Reihe TR in der Behauptung aus dem oben erläuterten Majorantenkriterium. Im Falle $\|S\| \leq a/\|T^{-1}\|$ gilt $q \leq a$, und die Reihe erfüllt $\|TR\| \leq \sum_{k=0}^\infty a^k \leq (1 - a)^{-1}$.

Mit der Stetigkeit von ST^{-1} schließen wir weiter

$$\begin{aligned} (T+S)R &= (I+ST^{-1}) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-ST^{-1})^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^n (-ST^{-1})^k - \sum_{k=0}^n (-ST^{-1})^{k+1} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^n (-ST^{-1})^k - \sum_{l=1}^{n+1} (-ST^{-1})^l \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - (-ST^{-1})^{n+1}) = I, \end{aligned}$$

wegen $\|(-ST^{-1})^{n+1}\| \leq q^{n+1} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Also ist $T+S$ surjektiv. Nach einem wichtigen Resultat der linearen Algebra (siehe z.B. Korollar 3 in Abschnitt 2.2 von [3]) ist $T+S$ somit bijektiv mit der Inversen R . Die letzte Behauptung folgt dann aus der oben gezeigten Ungleichung $\|TR\| \leq (1-a)^{-1}$. $\square$

Der folgende *Banachsche Fixpunktsatz* ist ein zentrales Hilfsmittel der Analysis.

THEOREM 2.40. *Seien M ein vollständiger metrischer Raum und $f : M \rightarrow M$ eine strikte Kontraktion; d.h., es gebe ein $q \in [0, 1)$ mit $d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y)$ für alle $x, y \in M$. Dann existiert genau ein Element $x_* \in M$ mit $f(x_*) = x_*$.*

BEWEIS. Sei $x_0 \in M$ ein beliebiger Startwert. Wir setzen rekursiv $x_{n+1} = f(x_n) \in M$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Sei $k \geq j+2$ in $\mathbb{N}_0$. Die Voraussetzung impliziert nun

$$d(x_k, x_{k-1}) = d(f(x_{k-1}), f(x_{k-2})) \leq q d(x_{k-1}, x_{k-2}) \leq \cdots \leq q^{k-j-1} d(x_{j+1}, x_j).$$

Für $n > m$ liefern die Dreiecksungleichung und die obige Abschätzung

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (q^{n-m-1} + q^{n-m-2} + \cdots + 1) d(x_{m+1}, x_m) \leq \frac{1}{1-q} d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq \frac{q^m}{1-q} d(x_1, x_0) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Also ist (x_n) eine Cauchyfolge in M und hat somit einen Grenzwert x_* in M . Da f stetig ist, ergibt sich die gewünschte Gleichung $x_* = f(x_*)$ aus $x_{n+1} = f(x_n)$.

Sei auch $y = f(y)$ ein Fixpunkt. Die strikte Kontraktivität zeigt dann die Relation

$$d(x_*, y) = d(f(x_*), f(y)) \leq q d(x_*, y).$$

Da $q < 1$ ist, muss $d(x_*, y) = 0$ und folglich $y = x_*$ gelten. $\square$

Man wendet dieses Theorem oft auf abgeschlossene Teilmengen M eines Banachraums X an. Dabei formuliert man zuerst das gegebene Problem geeignet um und erhält damit die Abbildungsvorschrift von f . Die Hauptschwierigkeit ist meist, den Definitionsbereich M so zu wählen, dass f die Menge M invariant lässt (d.h., $f(M) \subseteq M$ gilt) und eine strikte Kontraktion auf M wird. Wir werden dies bei zwei wesentlichen Resultaten der Vorlesung tun (den Theoremen 3.36 und 5.7).

2.4. Kompaktheit und Wegzusammenhang

Wir verallgemeinern nun (soweit möglich) die Hauptsätze über stetige Funktionen aus Analysis 1 auf metrische Räume. Unser Vorgehen beruht dabei vor allem auf der folgenden fundamentalen Eigenschaft, die uns etwas Konvergenz schenkt.

DEFINITION 2.41. *Sei M ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $K \subseteq M$ heißt kompakt (in M), wenn jede Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ in K eine in M konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_{j \geq 1}$ mit Grenzwert $x \in K$ besitzt. Wenn hier $K = M$ ist, dann ist M ein kompakter metrischer Raum.*

Beispiele kompakter Mengen sind endliche Teilmengen oder $C := \{y, y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ für eine Folge (y_n) in M mit Grenzwert y , wobei in C gleiche Folgenglieder nur einmal auftreten. Zunächst erklären wir weitere (weniger zentrale) Begriffe.

BEMERKUNG 2.42. Sei M ein metrischer Raum.

a) Sei $(x_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in M . Ein Punkt $x \in M$ heißt *Häufungspunkt der Folge* (x_n) , wenn in jeder Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder liegen. Das ist genau dann der Fall, wenn es eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j \geq 1}$ gibt, die gegen x konvergiert. (Dies zeigt man ähnlich wie Satz 2.20 in Analysis 1.)

b) Sei B eine Teilmenge von M . Der *Durchmesser* $\delta(B) = \sup_{x,y \in B} d(x,y)$ von B ist genau dann endlich, wenn B in einer Kugel $\overline{B}(z_0, R_0)$ für gewisse $z_0 \in M$ und $R_0 > 0$ liegt. Man nennt solche Mengen B *beschränkt*. Wenn dies der Fall ist, dann gibt es sogar für jeden Punkt $z \in M$ einen Radius $R > 0$ mit $B \subseteq \overline{B}(z, R)$.

BEWEIS. Sei $\delta(B) < \infty$. Sei $z \in M$. Wähle einen Punkt $y_0 \in B$. Setze $R = \delta(B) + d(y_0, z)$. Dann gilt die Ungleichung $d(y, z) \leq d(y, y_0) + d(y_0, z) \leq R$ für jedes $y \in B$, und somit liegt B in $\overline{B}(z, R)$.

Nun liege B in einer Kugel $\overline{B}(z_0, R_0)$. Für alle $x, y \in B$ erhalten wir dann $d(x, y) \leq d(x, z_0) + d(z_0, y) \leq 2R_0$. $\square$

In Abschnitt 4.2 von Analysis 1 haben wir oft abgeschlossene und beschränkte Definitionsbereiche verwendet. Wir zeigen zuerst, dass diese beiden Eigenschaften notwendig für Kompaktheit sind. Außerdem vererbt sich Kompaktheit auf abgeschlossene Teilmengen. Die sehr typischen Beweise kombinieren Kompaktheit mit der Folgencharakterisierung der Abgeschlossenheit.

LEMMA 2.43. *Seien M ein metrischer Raum, $K \subseteq M$ kompakt und $A \subseteq K$ abgeschlossen. Dann ist K abgeschlossen und beschränkt, sowie A kompakt in M .*

BEWEIS. Sei (x_n) eine Folge in K mit Limes x in M . Weil K kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von K mit einem Grenzwert $y \in K$. Da $(x_{n_k})_k$ auch gegen x konvergiert, liegt $x = y$ in K und somit ist K nach Satz 2.18 abgeschlossen.

Wir nehmen an, K wäre unbeschränkt. Bemerkung 2.42 liefert dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, y_n \in K$ mit $d(x_n, y_n) > n$. Da K kompakt ist, finden wir Teilfolgen $(x_{n_k})_k$ und $(y_{n_{k_j}})_{j \geq 1}$ mit Limiten x , bzw. y , in K . Auf Grund der Stetigkeit

der Metrik d aus Beispiel 2.31 streben die Abstände $d_j := d(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})$ gegen $d(x, y)$ für $j \rightarrow \infty$, was ihrer Unbeschränktheit widerspricht. Also ist K beschränkt.

Schließlich sei $A \subseteq K$ abgeschlossen. Wähle eine Folge (x_n) in A . Wegen der Kompaktheit hat sie eine Teilfolge mit Grenzwert x in K . Da A abgeschlossen ist, liegt x tatsächlich in A , sodass A kompakt ist. $\square$

Viele der speziellen analytischen Eigenschaften endlichdimensionaler normierter Vektorräume beruhen auf dem folgenden *Satz von Bolzano–Weierstraß*. Man beachte, dass Abgeschlossenheit und Beschränktheit oft relativ leicht nachzuprüfen sind.

THEOREM 2.44. *Sei V ein endlichdimensionaler normierter Vektorraum. Eine Menge $K \subseteq V$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

BEWEIS. Lemma 2.43 zeigt die Implikation ‘ $\Rightarrow$ ’. Sei (v_n) eine Folge in K .

1) Sei zuerst K abgeschlossen und beschränkt in V bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ aus Bemerkung 2.36. Setze $(x_{1,n}, \dots, x_{m,n}) = \Phi v_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für den Operator $\Phi : V \rightarrow \mathbb{K}^m$ aus Bemerkung 2.36, wobei $m = \dim V$ ist. Dann gilt die Abschätzung

$$|x_{1,n}| \leq |\Phi v_n|_1 = \|v_n\| \leq \sup_{l \in \mathbb{N}} \|v_l\| < \infty.$$

Der Satz von Bolzano–Weierstraß in $\mathbb{K}$ (siehe Theorem 2.24 in Analysis 1) liefert eine Teilfolge $(x_{1,n_k})_k$ mit Grenzwert x_1 . Genauso findet man eine Teilteilfolge $(x_{2,n_{k_j}})_j$ mit Limes x_2 . Natürlich strebt auch $(x_{1,n_{k_j}})_j$ gegen x_1 . Dies setzt man iterativ fort und erhält solche strikt wachsende Indizes n_κ für $\kappa \in \mathbb{N}$, dass für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$ die Folge $(x_{j,n_\kappa})_\kappa$ in $\mathbb{K}$ für $\kappa \rightarrow \infty$ gegen eine Zahl x_j konvergiert. Wir setzen $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m$ und $v = \Phi^{-1}x \in V$.

Satz 2.9 liefert nun die Konvergenz von $|\Phi v_{n_\kappa} - x|_1 = \|v_{n_\kappa} - v\|$ gegen 0 für $\kappa \rightarrow \infty$. Da K abgeschlossen ist, liegt auch v in K . Also ist K kompakt.

2) Sei nun K abgeschlossen und beschränkt in V bezüglich irgendeiner Norm $\|\cdot\|$. Nach Satz 2.54 unten ist diese äquivalent zu $\|\cdot\|$. Auf Grund der Sätze 2.7 und 2.18 ist K auch für $\|\cdot\|$ abgeschlossen und ferner beschränkt. Schritt 1) liefert dann eine in $\|\cdot\|$ konvergente Teilfolge $(v_{n_\kappa})_\kappa$ mit Grenzwert in K . Da die Normen äquivalent sind, konvergiert diese Teilfolge auch für $\|\cdot\|$, siehe Satz 2.7. Somit ist K für $\|\cdot\|$ kompakt. $\square$

Das obige Kriterium zeigt insbesondere, dass $\overline{B}(0, r)$ in $\mathbb{K}^m$ kompakt ist. Es versagt aber in unendlichdimensionalen normierten Vektorräumen, was die Analysis in diesen Strukturen massiv erschwert. Wir geben dazu ein Standardbeispiel an.

BEISPIEL 2.45. Die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B}(0, 1)$ ist in $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ nicht kompakt. Dazu betrachte man die stetigen Funktionen

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; \quad f_n(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 2^{-n-1} \text{ oder } 2^{-n} \leq t \leq 1, \\ 2^{n+2}t - 2, & 2^{-n-1} \leq t < 3 \cdot 2^{-n-2}, \\ -2^{n+2}t + 4, & 3 \cdot 2^{-n-2} \leq t < 2^{-n}, \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Diese haben die Norm $\|f_n\|_\infty = 1$ und sind auf paarweise disjunkten Intervallen ungleich 0, sodass für all $n \neq m$ in $\mathbb{N}$ der Abstand $\|f_n - f_m\|_\infty = 1$ ist. Also hat die Folge (f_n) in $\overline{B}(0, 1)$ keine konvergente Teilfolge. $\diamond$

Der folgende *Satz von Heine–Borel* zeigt eine erstaunliche Charakterisierung kompakter Mengen. Wir werden ihn in dieser Vorlesung fast nicht verwenden, aber schon in Analysis 3 wird er eine entscheidende Rolle spielen.⁴

THEOREM 2.46. *Sei M ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $K \subseteq M$ ist genau dann kompakt, wenn die Überdeckungseigenschaft gilt:*

$$\begin{aligned} &\text{Für jede Menge } \mathcal{O} \text{ offener Teilmengen von } M \text{ mit } K \subseteq \bigcup_{O \in \mathcal{O}} O \\ &\text{gibt es } O_1, \dots, O_n \in \mathcal{O} \text{ mit } K \subseteq O_1 \cup \dots \cup O_n. \end{aligned} \quad (\ddot{U})$$

(Dies bedeutet, dass jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung beinhaltet.)

BEWEIS. 1) Es gelte $(\ddot{U})$. Wir nehmen an, K wäre nicht kompakt. Dann gibt eine Folge (x_n) in K ohne Häufungspunkt in K ; d.h., für jedes $y \in K$ gibt es so einen Radius $r_y > 0$, dass die Kugel $B(y, r_y)$ nur endlich viele Glieder x_n enthält. Da $K \subseteq \bigcup_{y \in K} B(y, r_y)$ gilt, liefert $(\ddot{U})$ Punkte $y_1, \dots, y_m \in K$ mit $K \subseteq B(y_1, r_{y_1}) \cup \dots \cup B(y_m, r_{y_m}) =: B$. Aber diese Inklusion muss falsch sein, da B nur endlich viele x_n beinhaltet. Also ist K kompakt.

2a) **BEHAUPTUNG:** Sei K kompakt. Dann kann K für jedes $\varepsilon > 0$ durch endlich viele Kugeln mit Radius ε und Mittelpunkten in K überdeckt werden.

Beweis der Behauptung. Wir nehmen an, es gäbe so einen Radius $r > 0$, dass K nicht durch endlich viele Kugeln mit Radius r und Mittelpunkten in K überdeckt werden kann. Also gibt es ein Element $x_1 \in K$ mit $K \not\subseteq B(x_1, r)$. Wähle einen Punkt $x_2 \in K \setminus B(x_1, r)$. Dann ist $d(x_2, x_1) \geq r$. Da K nicht in $B(x_1, r) \cup B(x_2, r)$ enthalten sein kann, finden wir ein x_3 in der Menge $K \setminus (B(x_1, r) \cup B(x_2, r))$. Daraus folgen die Ungleichungen $d(x_3, x_1) \geq r$ und $d(x_3, x_2) \geq r$. Rekursiv erhalten wir so eine Folge (x_n) in K , dass $d(x_n, x_m) \geq r > 0$ für alle $n > m$ gilt. Nach Voraussetzung hat diese Folge einen Häufungspunkt $x \in K$. Also liegen unendlich viele Glieder x_{n_j} in $B(x, r/3)$, woraus die Ungleichung $d(x_{n_j}, x_{n_i}) \leq d(x_{n_j}, x) + d(x, x_{n_i}) < 2r/3$ für alle $i \neq j$ folgt. Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung. $\diamond$

2b) Sei K kompakt. Sei $\mathcal{C}$ eine offene Überdeckung von K . Wir nehmen, dass K von keiner endlichen Teilmenge von $\mathcal{C}$ überdeckt würde. Nach Schritt 2a) gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ endlich vielen Kugeln mit Mittelpunkt in K und mit Radius $1/n$, die K überdecken. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ finden wir also so eine Kugel $B_n := B(x_n, 1/n)$ mit $x_n \in K$, dass $B_n \cap K$ nicht von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{C}$ überdeckt wird. Da K kompakt ist, hat die Folge (x_n) einen Häufungspunkt $\hat{x} \in K$. Nach Voraussetzung liegt $\hat{x}$ in einer (offenen) Menge $\hat{O} \in \mathcal{C}$, und damit gibt es einen Radius $\varepsilon > 0$ mit

⁴Der folgende Beweis wurde in der Vorlesung nicht behandelt.

$B(\hat{x}, \varepsilon) \subseteq \hat{O}$. Wir erhalten dann so einen Index $N \in \mathbb{N}$, dass die Ungleichungen $d(x_N, \hat{x}) < \varepsilon/2$ und $N \geq 2/\varepsilon$ gelten. Jeder Punkt $x \in B_N$ erfüllt demnach

$$d(x, \hat{x}) \leq d(x, x_N) + d(x_N, \hat{x}) < \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon;$$

d.h., $B_N \subseteq B(\hat{x}, \varepsilon) \subseteq \hat{O}$. Dieser Widerspruch zeigt, dass K die Überdeckungseigenschaft besitzt. $\square$

Wir zeigen nun eine Reihe von Sätzen, die Kompaktheit für stetige Funktionen ausnutzen. Dabei beginnen wir mit dem *Satz von Heine*, der gleichmäßige Stetigkeit auf Kompakta liefert. Der Beweis gleicht dem von Theorem 4.19 in Analysis 1.

THEOREM 2.47. *Seien K und N metrische Räume, K kompakt und $f : K \rightarrow N$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

BEWEIS. Wir nehmen an, f wäre nicht gleichmäßig stetig. Nach (2.8) gibt es dann einen Radius $\varepsilon_0 > 0$ und Elemente $x_n, y_n \in K$, die den Ungleichungen $d(x_n, y_n) \leq 1/n$ und $d(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon_0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ genügen. Da K kompakt ist, finden wir sukzessiv Teilfolgen $(x_{n_k})_k$ und $(y_{n_k})_k$ mit Grenzwerten x , bzw. y , in K . Die Stetigkeit der Metrik d gemäß Beispiel 2.31 impliziert nun die Konvergenz

$$0 \leq d(x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_k}, y_{n_k}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} 1/n_k = 0,$$

sodass $x = y$ gilt. Da auch f stetig ist, strebt $d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k}))$ somit gegen $d(f(x), f(x)) = 0$. Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung. $\square$

Als eine typische Anwendung dieses Satzes beweisen wir, dass man Grenzwert und Integral unter einer Stetigkeitsannahme vertauschen kann, siehe auch Satz 4.16.

KOROLLAR 2.48. *Sei $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $x \in [a, b]$. Dann ist die Abbildung $[c, d] \rightarrow \mathbb{R}; y \mapsto f(x, y)$, stetig. Setze $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ für $x \in [a, b]$. Dann ist $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und somit gilt*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d f(x_0, y) dy \quad \text{für jedes } x_0 \in [a, b].$$

BEWEIS. Die erste Behauptung folgt direkt aus der Stetigkeitsdefinition. Seien $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in K$. Gemäß der Theoreme 2.47 und 2.44 ist f gleichmäßig stetig. Sei der Radius $\delta_\varepsilon > 0$ wie in (2.8) gewählt. Wir betrachten Zahlen $x \in [a, b]$ mit $|x - x_0| \leq \delta_\varepsilon$ und $y \in [c, d]$. Dann gilt $|(x_0, y) - (x, y)|_2 = |x_0 - x| \leq \delta_\varepsilon$ und somit liefert (2.8) die Ungleichung $|f(x_0, y) - f(x, y)| \leq \varepsilon$. Daraus folgt die Abschätzung

$$|F(x_0) - F(x)| = \left| \int_c^d (f(x_0, y) - f(x, y)) dy \right| \leq \int_c^d |f(x_0, y) - f(x, y)| dy \leq (d - c)\varepsilon.$$

Nach Satz 2.32 ist also F bei x_0 und damit auf $[a, b]$ stetig. $\square$

Der folgende, etwas überraschende Satz besagt, dass bei kompakten Definitionsbereichen die Stetigkeit sich stets auf die Umkehrfunktion vererbt. In Bemerkung 4.33

in Analysis 1 haben wir an einem einfachen Beispiel gesehen, dass dies im Allgemeinen nicht richtig ist. (Dort war der Definitionsbereich nicht kompakt und kein Intervall.) Ferner zeigt der Satz, dass stetige Funktionen Kompaktheit erhalten.

THEOREM 2.49. *Seien K und N metrische Räume, K kompakt, $A \subseteq K$ abgeschlossen, sowie $f : K \rightarrow N$ stetig. Dann ist das Bild $f(A)$ in N kompakt. Sei zusätzlich f injektiv. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(K) \rightarrow K$ stetig. Bijektive $f : K \rightarrow N$ sind somit homöomorph; d.h., f ist bijektiv, stetig und hat eine stetige Umkehrabbildung.*

BEWEIS. 1) Sei $A \subseteq K$ abgeschlossen. Nach Lemma 2.43 ist A sogar kompakt. Wähle eine Folge (y_n) im Bild $f(A)$. Dann gibt es Punkte $x_n \in A$ mit $f(x_n) = y_n$. Da A kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ mit einem Grenzwert x in A . Wegen der Stetigkeit von f konvergiert $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ für $k \rightarrow \infty$ gegen $f(x) \in f(A)$. Also ist $f(A)$ kompakt, und somit laut Lemma 2.43 abgeschlossen.

2) Sei f auch injektiv. Dann gibt es die Umkehrabbildung $g = f^{-1} : f(K) \rightarrow K$. Sei $A \subseteq K$ abgeschlossen. Man beachte die Gleichung

$$\begin{aligned} g^{-1}(A) &= \{y \in f(K) \mid \exists x \in A : x = g(y) = f^{-1}(y)\} \\ &= \{y \in f(K) \mid \exists x \in A : f(x) = y\} = f(A). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nach Schritt 1) ist $f(A)$ abgeschlossen. Satz 2.32 liefert nun die Stetigkeit von $g = f^{-1}$. Die letzte Behauptung ist dann klar. $\square$

Eine Funktion $f : M \rightarrow N$ heißt *offen* (bzw. *abgeschlossen*), wenn sie offene (bzw. abgeschlossene) Mengen in ebensolche abbildet. Für injektive f zeigen Formel (2.11) und Satz 2.32, dass $f^{-1} : f(M) \rightarrow M$ genau dann stetig ist, wenn f offen oder abgeschlossen ist.

Wie in Analysis 1 ist der *Satz vom Maximum* eines der zentralen Resultate über stetige Funktionen. Auch hier folgt der Beweis dem in Analysis 1.

THEOREM 2.50. *Seien K ein kompakter metrischer Raum und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren Punkte $x_{\pm} \in K$ mit*

$$f(x_+) = \max_{x \in K} f(x) =: \max_K f \quad \text{und} \quad f(x_-) = \min_{x \in K} f(x) =: \min_K f.$$

Insbesondere ist f beschränkt; d.h., es gibt ein M mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in K$.

BEWEIS. Nach Theorem 2.49 ist das Bild $f(K)$ kompakt und somit beschränkt in $\mathbb{R}$ (siehe Lemma 2.43). Also existiert die Zahl $y := \sup_{x \in K} f(x)$. Weiter gibt es Punkte $x_n \in K$ mit $f(x_n) \rightarrow y$. Da K kompakt ist, finden wir eine Teilfolge mit $(x_{n_k})_k$ mit Grenzwert x_+ in K . Die Stetigkeit von f impliziert dann die Konvergenz $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_+)$ für $k \rightarrow \infty$ und somit gilt $f(x_+) = y = \max_{x \in K} f(x)$. Das Minimum behandelt man genauso. $\square$

Unter geeigneten Annahmen kann man ausgehend von dem obigen Theorem auch nichtkompakte Definitionsbereiche behandeln. Wir betrachten hierzu ein typisches Beispiel für die Abbildung $x \mapsto \|f(x)\|$ und ein vektorwertiges f .

KOROLLAR 2.51. *Seien Y ein normierter Vektorraum und $f : \mathbb{K}^m \rightarrow Y$ stetig mit $\|f(x)\| \rightarrow 0$ für $|x|_2 \rightarrow \infty$. Dann existiert ein Punkt $x_+ \in \mathbb{K}^m$ mit $\|f(x_+)\| = \max_{x \in \mathbb{K}^m} \|f(x)\|$, sodass f beschränkt ist.*

BEWEIS. Nach Satz 2.30 und Beispiel 2.31 a) ist die Funktion $\varphi : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{R}$; $\varphi(x) = \|f(x)\|$, stetig. Für $\varphi = 0$ (und damit $f = 0$) ist die Behauptung klar. Andernfalls gibt es einen Punkt $x_0 \in \mathbb{K}^m$ mit $\delta := \|f(x_0)\| > 0$. Die Voraussetzung liefert so einen Radius $R > 0$, dass $\|f(x)\| \leq \delta/2$ für alle $x \in \mathbb{K}^m$ mit $|x|_2 \geq R$ gilt. Demnach muss x_0 in $\overline{B}(0, R)$ liegen. Auf $\overline{B}(0, R)$ nimmt φ wegen Theorem 2.50 sein Maximum bei einer Stelle x_+ an. Also ist $\|f(x_+)\| \geq \|f(x_0)\| \geq \delta > \|f(x)\|$ für alle $x \in \mathbb{K}^m$ mit $|x|_2 \geq R$. Damit gilt $\|f(x_+)\| = \max_{x \in \mathbb{K}^m} \|f(x)\|$. $\square$

Man kann den Satz vom Maximum auch verwenden, um positive Abstände nachzuweisen (vergleiche Korollar 4.25 in Analysis 1). Das nächste, sehr allgemeine diesbezügliche Resultat wird in späteren Vorlesungen immer wieder verwendet werden. In den nachfolgenden Bemerkung diskutieren wir es ein wenig.

KOROLLAR 2.52. *Seien M ein metrischer Raum, $A \subseteq M$ abgeschlossen, $K \subseteq M$ kompakt und $A \cap K = \emptyset$. Dann haben A und K einen positiven Abstand*

$$\text{dist}(K, A) := \inf_{x \in K} \inf_{a \in A} d(x, a) > 0.$$

BEWEIS. Die Funktion $d_A : M \rightarrow \mathbb{R}$; $d_A(x) = \inf_{a \in A} d(x, a)$, ist stetig laut Bemerkung 2.35. Da K kompakt ist, liefert Theorem 2.50 einen Punkt $x_- \in K$ mit

$$d_A(x_-) = \min_{x \in K} d_A(x) = \inf_{x \in K} \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Wegen $x_- \notin A$, zeigt Bemerkung 2.35 auch $d_A(x_-) > 0$. $\square$

BEMERKUNG 2.53. a) Zwei abgeschlossene disjunkte Mengen A und B können Abstand 0 haben. Ein Beispiel in $\mathbb{R}^2$ sind $A = [1, \infty) \times \{0\}$ und die Hyperbel $B = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x \geq 1\}$, da $d_A((x, \frac{1}{x})) = \frac{1}{x}$ für $x \rightarrow \infty$ gegen 0 geht. Dies kann auch bei einer offenen Menge O und einer kompakten K mit $O \cap K = \emptyset$ auftreten, etwa bei den sich berührenden Mengen $O = B(0, 1)$ und $K = [1, 2] \times \{0\}$ in $\mathbb{R}^2$.

b) Seien $A, B \neq \emptyset$ Mengen und $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ nach unten beschränkt. Dann ist

$$\inf_{a \in A} \inf_{b \in B} f(a, b) = \inf_{(a, b) \in A \times B} f(a, b) = \inf_{b \in B} \inf_{a \in A} f(a, b) =: \inf_{a \in A, b \in B} f(a, b).$$

Eine analoge Aussage gilt für Suprema.

BEWEIS. Für $(a, b) \in A \times B$ gilt $f(a, b) \geq \inf_{(\alpha, \beta) \in A \times B} f(\alpha, \beta) =: \kappa$. Daraus folgt zunächst $F(a) := \inf_{b \in B} f(a, b) \geq \kappa$ und dann $\inf_{a \in A} F(a) \geq \kappa$. Um die umgekehrte Ungleichung zu zeigen, wählen wir $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $(a_\varepsilon, b_\varepsilon) \in A \times B$ mit

$$\kappa \geq f(a_\varepsilon, b_\varepsilon) - \varepsilon \geq F(a_\varepsilon) - \varepsilon \geq \inf_{a \in A} \inf_{b \in B} f(a, b) - \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die erste Gleichung. Die zweite zeigt man genauso. $\square$

Mittels des Satzes vom Maximum können wir nun die Äquivalenz der Normen auf jedem endlichdimensionalen Vektorraum V zeigen. Somit ist es für reine Konvergenzbetrachtungen egal, welche Norm man auf V wählt. In unendlichdimensionalen Vektorräumen kann es sehr wohl nicht-äquivalente Normen mit sehr unterschiedlichen Eigenschaften geben, siehe Beispiel 2.10 und Satz 2.13.

SATZ 2.54. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Dann sind alle Normen auf V äquivalent. Insbesondere ist V mit jeder Norm ein Banachraum.*

BEWEIS. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf V . Wir verwenden auch die Norm $\|v\| = |\Phi v|_1$ für $v \in V$ aus Bemerkung 2.36, wobei $\Phi v = (x_1, \dots, x_m)$ und $x = x_1 b_1 + \dots + x_m b_m$ für eine Basis $\{b_1, \dots, b_m\}$ von V sind. Da $\|\cdot\|$ vollständig ist, müssen wir nur noch die Äquivalenz von $\|\cdot\|$ und $\|v\|$ zeigen. (Siehe Bemerkung 2.12 und Definition 2.6.)

1) Zum einen gilt die Abschätzung

$$\|x\| = \|x_1 b_1 + \dots + x_m b_m\| \leq \sum_{k=1}^m |x_k| \|b_k\| \leq \max\{\|b_1\|, \dots, \|b_m\|\} \|v\| =: C \|v\|.$$

2) Wir zeigen nun die umgekehrte Ungleichung. Wir haben bislang den Satz von Bolzano–Weierstraß Theorem 2.44 für die Norm $\|v\|$ bewiesen (siehe Schritt 1) im dortigen Beweis). Gemäß Beispiel 2.23 ist die Sphäre $S(0, 1) = \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$ abgeschlossen für $\|v\|$, und sie ist natürlich auch beschränkt. Also ist sie in $(V, \|\cdot\|)$ nach Theorem 2.44 kompakt. Wir setzen $f : (V, \|\cdot\|) \rightarrow \mathbb{R}; f(v) = \|v\|$. Wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung und Schritt 1) gilt dann

$$|f(v) - f(w)| \leq \|v - w\| \leq C \|v - w\|, \quad v, w \in V.$$

Also ist f stetig. Der Satz vom Maximum Theorem 2.50 liefert einen Vektor $v_0 \in S(0, 1)$ mit $c := \|v_0\| = f(v_0) \leq f(w) = \|w\|$ für alle $w \in S(0, 1)$. Da $v_0 \neq 0$ ist, gilt $c > 0$. Sei nun $v \in V \setminus \{0\}$. Wir setzen $w = \|v\|^{-1} v \in S(0, 1)$ und erhalten

$$c \leq \|w\| = \frac{\|v\|}{\|v\|}.$$

Somit sind $\|\cdot\|$ und $\|v\|$ äquivalent. □

Wir verbessern noch Satz 4.23 aus Analysis 1 deutlich. Dabei zeigen wir, dass man eine gleichmäßig stetige Funktion von einer dichten Teilmenge stetig und eindeutig auf den ganzen metrischen Raum fortsetzen kann, falls der Bildraum vollständig ist. Diese Aussage wird in der Analysis oft benutzt (wenn auch nicht so sehr in dieser Vorlesung).

SATZ 2.55. *Sei M und N metrische Räume, N vollständig, D dicht in M , und $f : D \rightarrow N$ gleichmäßig stetig. Dann gibt es genau eine stetige Funktion $\tilde{f} : M \rightarrow N$ mit $\tilde{f}|_D = f$, die stetige Fortsetzung von f . Sie ist auch gleichmäßig stetig.*

BEWEIS. 1) Zuerst konstruieren wir die Fortsetzung von f per Approximation.

a) Sei $x_0 \in M \setminus D$. Nach Voraussetzung und Satz 2.22 gibt es Punkte $x_n \in D$ mit $x_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir verwenden den Radius $\delta_\varepsilon > 0$ aus (2.8) für f . Es gibt einen Index N_ε mit $d(x_n, x_0) \leq \delta_\varepsilon/2$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. Somit gilt $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) \leq \delta_\varepsilon$ für alle $n, m \geq N_\varepsilon$ und damit wegen (2.8) auch $d(f(x_n), f(x_m)) \leq \varepsilon$. (Man beachte, dass hier und an ähnlichen Stellen Stetigkeit alleine nicht ausreichte.) Da N vollständig ist, existiert $y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$. Im Grenzwert $m \rightarrow \infty$ erhalten wir auch $d(f(x_n), y_0) \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$.

b) Bevor wir $\tilde{f}(x_0)$ durch den Limes y_0 definieren können, müssen wir zeigen, dass er nicht von der Wahl der Folge (x_n) abhängt. Sei dazu auch $x'_n \in D$ mit $x'_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$. Wieder gibt es einen Index N'_ε mit $d(x'_n, x_0) \leq \delta_\varepsilon/2$ für alle $n \geq N'_\varepsilon$. Daraus folgt $d(x'_n, x_n) \leq \delta_\varepsilon$ für $n \geq \max\{N'_\varepsilon, N_\varepsilon\}$. Aus (2.8) und Schritt a) schließen wir dann

$$d(y_0, f(x'_n)) \leq d(y_0, f(x_n)) + d(f(x_n), f(x'_n)) \leq 2\varepsilon.$$

Also konvergiert auch $(f(x'_n))$ gegen y_0 . Wir setzen nun $\tilde{f}(x_0) = y_0$ und $\tilde{f}(x) = f(x)$ für $x \in D$.

2) Wir zeigen die gleichmäßige Stetigkeit von $\tilde{f} : M \rightarrow N$. Weiterhin seien $\varepsilon > 0$ und $\delta_\varepsilon > 0$ aus (2.8) für f . Wähle $x, z \in M$ mit $d(x, z) \leq \delta_\varepsilon/3$. Nach Schritt 1) gibt es Punkte $x', z' \in D$ mit $d(x, x') \leq \delta_\varepsilon/3$, $d(z, z') \leq \delta_\varepsilon/3$, $d(\tilde{f}(x), f(x')) \leq \varepsilon$ und $d(\tilde{f}(z), f(z')) \leq \varepsilon$. (Für $x \in D$ setzt man einfach $x' = x$.) Also haben wir

$$d(x', z') \leq d(x', x) + d(x, z) + d(z, z') \leq \delta_\varepsilon.$$

Mit (2.8) folgt dann wie gewünscht

$$d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(z)) \leq d(\tilde{f}(x), f(x')) + d(f(x'), f(z')) + d(f(z'), \tilde{f}(z)) \leq 3\varepsilon.$$

3) Sei auch $g : M \rightarrow N$ eine stetige Fortsetzung von f . Wähle $x_0 \in M \setminus D$. Wir nehmen wieder eine Folge (x_n) in D mit Grenzwert x_0 . Die Stetigkeit von g und $\tilde{f}$ impliziert nun

$$g(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(x_n) = \tilde{f}(x_0). \quad \square$$

Um den Zwischenwertsatz für reelle Funktionen auf z.B. $\mathbb{R}^m$ zu verallgemeinern, benötigen wir den folgenden Begriff.

DEFINITION 2.56. *Ein metrischer Raum M heißt wegzusammenhängend, wenn es für alle $x, y \in M$ einen stetigen Weg in M von x nach y gibt; d.h., es gibt eine Funktion $w \in C([0, 1], M)$ mit $w(0) = x$ und $w(1) = y$.*

Statt von Wegen spricht man hier auch von Kurven. Es gibt den schwächeren Begriff des ‘Zusammenhangs’, auf den wir aber nicht eingehen werden. Wir diskutieren zunächst das Verhältnis des Wegzusammenhangs mit anderen wichtigen Konzepten.

BEISPIEL 2.57. a) Eine nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ (versehen mit $d(x, y) = |x - y|$) ist genau dann wegzusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist.

BEWEIS. Sei $M = [a, b]$. Für gegebene $x, y \in [a, b]$ setzen wir $w(t) = (1-t)x + ty$ für $t \in [0, 1]$. Dann ist $w : [0, 1] \rightarrow M$ stetig mit $w(0) = x$ und $w(1) = y$.

Sei M wegzusammenhängend. Wir nehmen an, M wäre kein Intervall. Dann gibt es Zahlen $x < z < y$ mit $x, y \in M$ und $z \in \mathbb{R} \setminus M$. Weiter haben wir eine Funktion $w \in C([0, 1], M)$ mit $w(0) = x$ und $w(1) = y$. Nach dem Zwischenwertsatz Theorem 2.24 in Analysis 1 ist $w([0, 1]) \subseteq M$ ein Intervall, muss also z enthalten. Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung. $\square$

b) Sei X ein normierter Vektorraum. Eine Teilmenge M von X heißt *konvex*, wenn für je zwei Punkte $x, y \in M$ die Verbindungsstrecke $\overrightarrow{xy} := \{(1-t)x + ty \mid t \in [0, 1]\}$ in M liegt. Sie heißt *sternförmig*, wenn es ein *Zentrum* $z_0 \in M$ so gibt, dass für alle $x \in M$ die Strecke $\overrightarrow{z_0x}$ in M liegt.

c) Konvexe Mengen sind sternförmig und sternförmige Mengen sind wegzusammenhängend. Die Umkehrungen sind im Allgemeinen falsch. $\diamond$

Wir zeigen nun den *Zwischenwertsatz* in metrischen Räumen, der für reellwertige Funktionen recht nahe am gleichnamigen Resultat aus Analysis 1 ist.

THEOREM 2.58. *Seien M und N metrische Räume, M wegzusammenhängend und $f \in C(M, N)$. Dann ist $f(M)$ wegzusammenhängend. Im Fall $N = \mathbb{R}$ ist $f(M)$ ein Intervall.*

BEWEIS. Es seien $y_0, y_1 \in f(M)$. Dann existieren Elemente x_0 und x_1 aus M mit $f(x_0) = y_0$ und $f(x_1) = y_1$. Nach Voraussetzung gibt es eine Funktion $w \in C([0, 1], M)$ mit $w(0) = x_0$ und $w(1) = x_1$. Dann liegt $v := f \circ w$ in $C([0, 1], f(M))$ und erfüllt $v(0) = y_0$ und $v(1) = y_1$. Also ist $f(M)$ wegzusammenhängend. Die zweite Behauptung folgt nun aus Beispiel 2.57. $\square$

KAPITEL 3

Differentialrechnung

In diesem Kapitel entwickeln wir eine Theorie der Ableitung von Funktionen $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, die der in $\mathbb{R}$ gleicht. Allerdings können wir die Definition mittels des Differenzenquotienten aus Analysis 1 nicht übernehmen, da diese auf der Körperstruktur von $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) beruht. Bevor wir die neue Definition angeben, diskutieren wir einen einfachen Spezialfall und einen eng verwandten Begriff.

Soweit nichts anderes gesagt wird, sind V und W endlichdimensionale normierte Vektorräume über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\emptyset \neq D \subseteq V$ oder $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^m$ sind offene Teilmengen, $\mathbb{R}^m$ ist mit $|\cdot|_2$ und $L(V, W)$ mit der Operatornorm $\|\cdot\|$ versehen.

Eine Funktion $f : M \rightarrow N_1 \times \cdots \times N_l$ kann man als Vektor $f = (f_1 \cdots f_l)^\top$ schreiben. Dabei sind die Komponenten $f_j := P_j \circ f : M \rightarrow N_j$ durch die Koordinatenabbildungen $P_j : N_1 \times \cdots \times N_l \rightarrow N_j$; $x = (x_1 \cdots x_l)^\top \mapsto x_j$, gegeben.

3.1. Differenzierbarkeit und Ableitungsregeln

A) Die Kurventangente. Sei J ein Intervall positiver Länge. Wir betrachten zunächst auf J definierte, vektorwertige Funktionen.

DEFINITION 3.1. *a) Seien $f = (f_1 \cdots f_l)^\top : J \rightarrow \mathbb{R}^l$ und $t_0 \in J$. Die Funktion f ist bei t_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert*

$$f'(t_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(t_0 + h) - f(t_0)) \quad (3.1)$$

in $\mathbb{R}^l$ existiert. Der Vektor $f'(t_0) \in \mathbb{R}^l$ heißt dann Ableitung von f bei t_0 . Wenn dies bei allen $t_0 \in J$ gilt, ist f differenzierbar (auf J), und wir haben die Ableitung $f' : J \rightarrow \mathbb{R}^l$. Falls f' auf J auch stetig ist, nennen wir f stetig differenzierbar (auf J). Iterativ definiert man die k -te Ableitung $f^{(k)}$ für $k \in \mathbb{N}$ (soweit existent). Man schreibt $C^k(J, \mathbb{R}^l) = \{f : J \rightarrow \mathbb{R}^l \mid f \text{ ist } k\text{-fach stetig differenzierbar}\}$.

b) Sei $f \in C^k(J, \mathbb{R}^l)$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Man bezeichnet dann f auch als C^k -Kurve oder als C^k -Parametrisierung, und $\Gamma = f(J)$ als Spur der Kurve. Sei $f'(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in J$. Dann ist $f'(t_0) \in \mathbb{R}^l$ der Tangentialvektor und

$$T_{t_0}f = \{\tau(s) = f(t_0) + (s - t_0)f'(t_0) \mid s \in \mathbb{R}\}$$

die Tangente von f bei t_0 . Man nennt f regulär, wenn $f'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$ ist.

In (3.1) betrachten wir $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $t_0 + h \in J$. Falls J Randpunkte hat, erhalten wir dort einseitige Grenzwerte in (3.1). Wir diskutieren die obigen Begriffe, bevor wir zwei Beispiele behandeln. In Kapitel 4 kommen wir auf Kurven zurück.

BEMERKUNG 3.2. a) Nach Satz 2.9 gilt genau dann (3.1), wenn jede Komponente $f_j : J \rightarrow \mathbb{R}$ in t_0 differenzierbar ist, und dann haben wir $f'(t_0) = (f'_1(t_0) \cdots f'_l(t_0))^T$. Ferner ist $C^k(J, \mathbb{R}^l) = \{f = (f_1 \cdots f_l)^T : J \rightarrow \mathbb{R}^l \mid \forall j \in \{1, \dots, l\} : f_j \in C^k(J, \mathbb{R})\}$.

b) Die gleiche Spur kann sehr unterschiedlich (regulär oder nicht regulär) parametrisiert werden. Als Beispiel betrachten wir die Kreislinie $\Gamma = S(0, 1)$ in $\mathbb{R}^2$, die das Bild folgender Funktionen ist:

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad g(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix},$$

$$h : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad h(t) = \begin{cases} (1 \ 0)^T, & t \in [0, 2\pi), \\ f(t - 2\pi), & t \in [2\pi, 4\pi]. \end{cases}$$

Hier durchlaufen f und h die Kreislinie einmal im Gegenuhrzeigersinn und g zweimal mit doppelter Geschwindigkeit (im Vergleich zu f) im Uhrzeigersinn. Dabei sind f und g regulär, aber nicht h , da h zuerst konstant ist.

c) Seien $f \in C^k(J, \mathbb{R}^l)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\phi : I \rightarrow J$ eine bijektive Abbildung in $C^k(I, \mathbb{R})$ mit $\phi'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. (Sie ist dann strikt monoton.) Dann ist ϕ ein C^k -Parameterwechsel. Im Falle $\phi' > 0$ heißt er *orientierungserhaltend*. Die Funktion $g = f \circ \phi$ liegt in $C^k(I, \mathbb{R}^l)$ und hat das Bild $g(I) = f(J)$. Für $s_0 \in I$ und $t_0 = \phi(s_0)$ zeigen Teil a) und die Kettenregel aus Analysis 1 die Gleichung

$$g'(s_0) = ((f_1 \circ \phi)'(s_0) \ \dots \ (f_l \circ \phi)'(s_0))^T = \phi'(s_0) f'(\phi(s_0)).$$

Wegen $\phi' \neq 0$ ist die Regularität von f äquivalent zu der von g . Wenn $f'(t_0) \neq 0$ ist, hat die Kurve g bei s_0 die gleiche Tangente wie f bei t_0 . Die jeweiligen Tangentialvektoren unterscheiden sich aber, falls $\phi'(s_0) \neq 1$ ist.

d) Sei $f : J \rightarrow \mathbb{R}^l$ in $t_0 \in J$ differenzierbar. Für gegebenes $v \in \mathbb{R}^l$ mit $v \neq f'(t_0)$, sei ferner $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^l$; $h(t) = f(t_0) + (t - t_0)v$. Wie in Bemerkung 5.2 von Analysis 1 erhält man so ein $\delta > 0$, dass für alle $t \in J$ mit $0 < |t - t_0| \leq \delta$ die Abschätzung

$$|f(t) - h(t)|_2 > |f(t) - \tau(t)|_2$$

gilt. Die Tangente ist also die beste lineare Approximation an f bei t_0 .

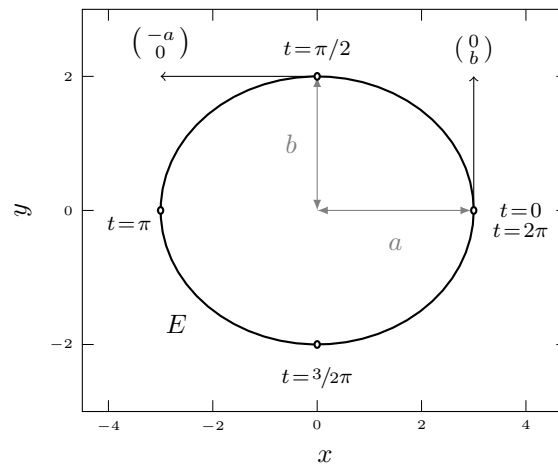
e) Wenn $u(t) \in \mathbb{R}^3$ die Position eines Teilchens zur Zeit t beschreibt, so ist $u'(t) \in \mathbb{R}^3$ seine Geschwindigkeit. $\diamond$

BEISPIEL 3.3. a) Die Ellipse E mit Halbmessern $a, b > 0$ wird durch $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$; $f(t) = (a \cos t \ b \sin t)^T =: (x(t) \ y(t))^T$, $t \in \mathbb{R}$, parametrisiert. Diese Funktion erfüllt $f'(t) = (-a \sin t \ b \cos t)^T$ und die Ellipsengleichung

$$\frac{x(t)^2}{a^2} + \frac{y(t)^2}{b^2} = \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1.$$

(Für $a = b = r$ erhält man den Kreis um 0 mit Radius r .) Eine weitere Parametrisierung ist $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$; $g(t) = (a \sin \frac{t}{2} \ b \cos \frac{t}{2})^T$. Es gelten $g(t) = f(\frac{\pi-t}{2})$ und $g'(t) = -\frac{1}{2}f'(\frac{\pi-t}{2})$ für $t \in \mathbb{R}$. Hier haben wir den (nicht orientierungserhaltenden)

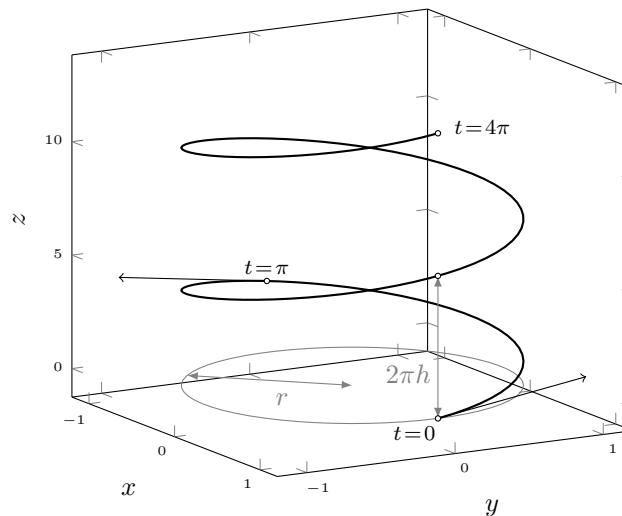
Parameterwechsel $\phi(s) = \frac{\pi-s}{2}$. Orientierungserhaltend wäre etwa $\psi(s) = \frac{\pi+s}{2}$. Das folgende Schaubild zeigt E mit der Parametrisierung f und zwei Tangentenvektoren.



b) Die Schraubenlinie mit Radius $r > 0$ und ‘Ganghöhe’ $2\pi h > 0$ ist durch

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad f(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ ht \end{pmatrix}, \quad \text{mit Ableitung } f'(t) = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ h \end{pmatrix},$$

gegeben. Auch hier zeigen wir das Bild von f und zwei Tangentenvektoren.



B) Partielle Ableitungen. Wir werden später Ableitungen meist mittels des folgenden Begriffs berechnen.

DEFINITION 3.4. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in D$ und $r > 0$ mit $B(x, r) \subseteq D$. Für $k \in \{1, \dots, m\}$ definieren wir die Funktion

$$\varphi_k : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}; \quad \varphi_k(t) = f(x + te_k) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, \dots, x_m).$$

Sei φ_k bei $t = 0$ differenzierbar. Dann bezeichnet man $\varphi'_k(0)$ als k -te partielle Ableitung von f bei x und schreibt

$$\partial_k f(x) = \partial_{x_k} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + te_k) - f(x)) = \varphi'_k(0).$$

Wenn alle partiellen Ableitungen $\partial_k f$ erster Ordnung bei x existieren, so heißt f bei x (einmal) partiell differenzierbar. Wenn dies für jedes $x \in D$ gilt, so ist f (auf D) partiell differenzierbar.

Wenn die partielle Ableitung $\partial_k f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf ganz D existiert, definiert man (soweit existent) die partiellen Ableitung zweiter Ordnung durch

$$\partial_j \partial_k f(x) = \partial_{jk} f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) := \partial_j (\partial_k f)(x)$$

für $j \in \{1, \dots, m\}$. (Man schreibt auch ∂_k^2 statt $\partial_k \partial_k$). Dies kann man zu partiellen Ableitungen n -ter Ordnung iterieren.

Man berechnet etwa $\partial_1 f(x)$, indem man die Variablen $x_2, \dots, x_m$ in f fest hält (sie also als Konstanten auffasst) und dann f wie in Analysis 1 nach x_1 ableitet. Dieses (sehr wichtige) Vorgehen illustrieren wir unten in einigen Beispiele.

Wir übertragen zunächst die einfacheren Ableitungsregeln aus Analysis 1 auf partielle Ableitungen. Bei Produkten beziehen sich die Ableitungen ∂_k etc. immer nur auf die unmittelbar folgende Funktion.

LEMMA 3.5. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in D$ und $k \in \{1, \dots, m\}$ so, dass die partiellen Ableitungen $\partial_k f(x)$ und $\partial_k g(x)$ existieren. Dann gelten die folgenden Aussagen.

- a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existiert $\partial_k(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \partial_k f(x) + \beta \partial_k g(x)$.
- b) Es existiert $\partial_k(fg)(x) = \partial_k f(x)g(x) + f(x)\partial_k g(x)$.
- c) Sei ferner $g(x) \neq 0$. Dann existiert

$$\partial_k \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{\partial_k f(x)g(x) - f(x)\partial_k g(x)}{g^2(x)}.$$

BEWEIS. Diese Aussagen folgen aus Satz 5.5 in Analysis 1, wenn wir ihn auf die Funktionen $t \mapsto \alpha f(x + te_k) + \beta g(x + te_k)$, $t \mapsto f(x + te_k)g(x + te_k)$ und $t \mapsto f(x + te_k)/g(x + te_k)$ anwenden. $\square$

Die Ketten- und Umkehrregel lassen sich auf dem Niveau partieller Ableitungen nicht so einfach formulieren und beweisen. (Siehe Satz 3.11 und Theorem 3.36.)

BEISPIEL 3.6. a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x, y) = 2x + \sin(xy^2)$. Auf $\mathbb{R}^2$ existieren dann

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x, y) &= 2 + y^2 \cos(xy^2), & \partial_2 f(x, y) &= 2xy \cos(xy^2), \\ \partial_{11} f(x, y) &= -y^4 \sin(xy^2) & \partial_{12} f(x, y) &= 2y \cos(xy^2) - 2xy^3 \sin(xy^2). \end{aligned}$$

b) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \{1, \dots, m\}$, und $f : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = |x|_2^\alpha$. Dann existiert die partielle Ableitung

$$\partial_k f(x) = \partial_k (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\alpha}{2} (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} 2x_k = \alpha x_k |x|_2^{\alpha-2}$$

für $x \neq 0$. Speziell gilt $\partial_k |x|_2 = \frac{x_k}{|x|_2}$.

c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

gegeben. Dann ist f bei $(0, 0)$ nach Beispiel 2.31 unstetig. Aber die partiellen Ableitungen existieren auf $\mathbb{R}^2$: Zunächst gelten für $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ die Gleichungen

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2) - xy2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \partial_2 f(x, y) = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Seien $(x, y) = (0, 0)$ und $t \neq 0$. Dann erhalten wir $\frac{1}{t}(f(t, 0) - f(0, 0)) = 0$ und somit gibt es $\partial_1 f(0, 0) = 0$. Ähnlich zeigt man die Existenz von $\partial_2 f(0, 0) = 0$.

Hier explodieren $\partial_1 f(0, y) = \frac{1}{y}$ und $\partial_2 f(x, 0) = \frac{1}{x}$ für $y \rightarrow 0$ bzw. $x \rightarrow 0$. $\diamond$

C) Die Ableitung. Für eine Abbildung $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ mit $m \geq 2$ können wir keinen Differenzenquotienten definieren. Um einen Ausweg zu finden, reformulieren wir die Definition der Ableitung einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bei $x_0 \in \mathbb{R}$. Die Ableitung $f'(x_0)$ liefert die Tangente und damit die beste lineare Approximation an f bei x_0 , siehe Bemerkung 5.2 in Analysis 1. Deswegen verwenden wir das erste Taylorrestglied $R(h) := f(x_0 + h) - (f(x_0) + f'(x_0)h)$ für $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, das die Differenz zwischen der Funktion und der Tangente bei $f(x_0)$ angibt. Dann konvergiert der Ausdruck

$$\frac{|R(h)|}{|h|} = \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| \rightarrow 0$$

für $h \rightarrow 0$. Auf der linken Seite steht hier ein Quotient von Beträgen. Dessen Konvergenz gegen 0 kann man auf Dimensionen $l, m > 1$ verallgemeinern, indem man die Beträge durch Normen ersetzt. In manchen Situationen (etwa in Matrizenräumen) benötigt man Ableitungen auch auf allgemeinen endlichdimensionalen Vektorräumen, sodass wir die Theorie anfänglich in dieser Allgemeinheit entwickeln. Dabei ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zugelassen. (Den unendlichdimensionalen Fall betrachten wir nicht, obwohl er sich nicht wesentlich unterscheidet, vergleiche Kapitel VII in [2].)

DEFINITION 3.7. Seien V und W endlichdimensionale normierte Vektorräume, $D \subseteq V$ offen, $f : D \rightarrow W$, $x_0 \in D$ und $r > 0$ mit $B_V(x_0, r) \subseteq D$. Betrachte $h \in V$ mit $0 < \|h\|_V < r$. Die Funktion f ist differenzierbar in x_0 , wenn es so eine lineare Abbildung $A = A_{x_0} \in L(V, W)$ gibt, dass

$$\frac{1}{\|h\|_V} \|f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah\|_W \rightarrow 0 \quad \text{für } \|h\|_V \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

konvergiert. Man schreibt dann $f'(x_0) := A$ und nennt A die Ableitung von f bei x_0 . Wenn f in jedem $x_0 \in D$ differenzierbar ist, so heißt f differenzierbar auf D und die Abbildung $f' : D \rightarrow L(V, W)$ bezeichnet man als Ableitung von f .

In dieser Definition ist $f'(x)$ nicht als ein Limes gegeben, sondern muss eigentlich zuerst ‘geraten’ werden, bevor man (3.2) nachprüfen kann. Allerdings kann dies Hand in Hand geschehen, siehe Beispiel 3.10. In der Literatur verwendet man statt f' oft ∂f , df oder Df ; auch bei den partiellen Ableitungen variieren die Notationen. Üblicherweise schreiben wir einfach $\|\cdot\|$ statt $\|\cdot\|_V$ oder $\|\cdot\|_W$. Wir verwenden meist die Räume $V = \mathbb{R}^m$ und $W = \mathbb{R}^l$, die mit $|\cdot|_2$ versehen sind. In diesem Fall werden wir in Theorem 3.13 eine Formel für $f'(x)$ finden.

Wir zeigen zunächst, dass die Ableitung wieder die beste lineare Approximation an f bei x_0 ist und dass sie eindeutig bestimmt ist. Am Ende des Kapitels diskutieren wir ihren Bezug zu Tangentialflächen. Wie in Definition 5.38 in Analysis 1 bedeutet $R(x) = o(\|x\|)$ für $x \rightarrow 0$, dass $\frac{\|R(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0$ für $\|x\| \rightarrow 0$ konvergiert.

BEMERKUNG 3.8. Es seien $f : D \rightarrow W$ und $B(x_0, r) \subseteq D$.

a) Mit $A = f'(x_0)$ erhalten wir in Definition 3.7 die Äquivalenzen

$$(3.2) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, r) \forall h \in \overline{B}(0, \delta) : \|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\| \leq \varepsilon \|h\|$$

$$\iff f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R(h) \text{ mit } R(h) = o(\|h\|), h \rightarrow 0.$$

Weiter sei $B \in L(V, W)$ ungleich $f'(x_0)$. Wähle einen Vektor $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ und $\alpha := \|Bv - f'(x_0)v\| > 0$. Für $t \in (0, r)$ und $h = tv$ gelten $x_0 + h \in D$ und

$$\frac{1}{\|h\|} \|f(x_0 + h) - f(x_0) - Bh\| = \frac{1}{\|h\|} \|f'(x_0)h - Bh + R(h)\| \geq \|Bv - f'(x_0)v\| - \frac{R(h)}{\|h\|}.$$

Da die rechte Seite gegen α für $\|h\| = t \rightarrow 0$ strebt, folgt für genügend kleine t mit (3.2) die Ungleichung

$$\|f(x_0 + tv) - f(x_0) - B(tv)\| \geq \frac{2t\alpha}{3} > \frac{t\alpha}{3} \geq \|f(x_0 + tv) - f(x_0) - f'(x_0)(tv)\|.$$

b) Ähnlich wie in Teil a) sieht man dass ein Operator $B \in L(V, W)$, der (3.2) erfüllt, schon gleich $f'(x_0)$ sein muss. $\diamond$

c) Für offene J stimmen Definitionen 3.1 und 3.7 und die jeweiligen Ableitungen überein. Wegen Bemerkung 3.2 a) folgt dies aus dem Text vor Definition 3.7. $\diamond$

Als nächstes sehen wir, dass Differenzierbarkeit im obigen Sinne wie im Eindimensionalen die Stetigkeit impliziert. Folglich ist die in $(0, 0)$ unstetige Funktion f aus Beispiel 3.6 c) dort nicht ableitbar, obwohl sie partiell differenzierbar ist!

SATZ 3.9. Seien $D \subseteq V$ offen und $f : D \rightarrow W$ in $x_0 \in D$ differenzierbar. Dann gibt es solche Konstanten $r, c > 0$, dass $\overline{B}(x_0, r) \subseteq D$ und

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|_W \leq c \|h\|_V$$

für alle $h \in V$ mit $\|h\|_V \leq r$ gelten. Insbesondere ist f bei x_0 stetig.

BEWEIS. Da D offen ist, gibt es einen Radius $r_0 > 0$ mit $B(x_0, r_0) \subseteq D$. Aus (3.2) erhalten wir so eine Zahl $r \in (0, r_0)$, dass die Ungleichung

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\| \leq \|h\|$$

für alle $h \in \overline{B}(0, r) \setminus \{0\}$ gilt. Für diese h folgt nun

$$\begin{aligned} \|f(x_0 + h) - f(x_0)\| &\leq \|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\| + \|f'(x_0)h\| \\ &\leq (1 + \|f'(x_0)\|)\|h\|, \end{aligned}$$

wobei wir auch Satz 2.37 zur Operatornorm verwendet haben. $\square$

In den folgenden Beispielen berechnen wir die Ableitung direkt mittels Definition 3.7. Wir erinnern zuerst an einige Eigenschaften des (reellen) Skalarproduktes

$$(x|y) = \sum_{k=1}^m x_k y_k$$

für $x, y \in \mathbb{R}^m$: Die Abbildungen $x \mapsto (x|y)$ und $y \mapsto (x|y)$ von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}$ sind linear, und es gelten $(x|y) = (y|x)$, sowie $|x|_2^2 = (x|x) \geq 0$. Den Raum der $l \times m$ -Matrizen über $\mathbb{K}$ bezeichnen wir ferner mit $\mathbb{K}^{l \times m}$. Wir schreiben $A^\top = [a_{kj}] \in \mathbb{R}^{m \times l}$ für die *Transponierte* der Matrix $A = [a_{jk}] \in \mathbb{R}^{l \times m}$. Sie erfüllt die Gleichung

$$(Ax|y) = \sum_{j=1}^l \left(\sum_{k=1}^m a_{jk} x_k \right) y_j = \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^m a_{jk} x_k y_j = \sum_{k=1}^m x_k \left(\sum_{j=1}^l a_{jk} y_j \right) = (x|A^\top y).$$

Wir identifizieren oft $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ mit den m -dimensionalen Zeilenvektoren $\mathbb{R}^{1 \times m}$, sowie $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ mit $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m \times 1}$, und schreiben $(x|y) = x^\top y$ im Sinne des Matrizenproduktes.

BEISPIEL 3.10. a) Seien $A \in L(V, W)$ und $b \in V$. Wir betrachten die *affine Abbildung* $f : V \rightarrow W$; $f(x) = Ax + b$. Seien $x_0, h \in V$. Um $f'(x_0)$ zu bestimmen, müssen wir so eine lineare Funktion $h \mapsto B_{x_0}h$ finden, dass $f(x_0 + h) - f(x_0) - B_{x_0}h$ schneller als $\|h\|$ für $h \rightarrow 0$ gegen 0 strebt. Dafür muss $B_{x_0}h$ gerade dem linearen Anteil von $f(x_0 + h) - f(x_0)$ entsprechen. Hier gilt

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A(x_0 + h) - Ax_0 = Ah,$$

also wird man $B_{x_0} = A$ setzen. Damit folgt nämlich

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah = 0,$$

sodass (3.2) offenbar gilt. Folglich ist f differenzierbar mit $f'(x_0) = A$ für jedes $x_0 \in V$. Hier ist $f' : V \rightarrow L(V, W)$ die konstante Funktion $x \mapsto A$.

b) Der Operator $A \in L(\mathbb{R}^m)$ werde durch die $m \times m$ -Matrix $[a_{jk}]$ dargestellt. Wir betrachten die *quadratische Funktion* $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = (Ax|x)$. Seien $x_0, h \in \mathbb{R}^m$. Mittels der obigen Eigenschaften des Skalarprodukts berechnen wir

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = (A(x_0 + h)|x_0 + h) - (Ax_0|x_0) = (Ax_0|h) + (Ah|x_0) + (Ah|h)$$

Der in h lineare Anteil läßt sich als $(Ax_0|h) + (Ah|x_0) = ((A + A^\top)x_0|h)$ schreiben.

Dies führt uns auf die Behauptung, dass die Funktion f bei jedem $x_0 \in \mathbb{R}^m$ differenzierbar und ihre Ableitung $f'(x_0) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ durch $f'(x_0)h = ((A + A^\top)x_0|h)$ für $h \in \mathbb{R}^m$ gegeben ist. (Hier ist also $f' : \mathbb{R}^m \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ eine lineare Funktion in x_0 .) Wir können auch $f'(x_0) = (Ax_0 + A^\top x_0)^\top$ schreiben. Im *symmetrischen* Fall $A^\top = A$, gilt somit $f'(x_0)h = 2(Ax_0|h)$ oder $f'(x_0) = 2(Ax_0)^\top$.

BEWEIS. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Für $h \in \mathbb{R}^m$ setzen wir

$$R(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - ((A + A^\top)x_0|h).$$

Die obige Rechnung, die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und Satz 2.37 zur Operatornorm führen auf

$$|R(h)| = |(Ah|h)| \leq |Ah|_2 |h|_2 \leq \|A\| |h|_2^2.$$

Also gilt $|R(h)|/|h|_2 \leq \|A\| |h|_2 \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$. $\square$

c) Das Matrizenprodukt $P : \mathbb{R}^{l \times m} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{l \times n}$; $(A, B) \mapsto AB$, behandelt man ähnlich. Seien $(A, B) \in \mathbb{R}^{l \times m} \times \mathbb{R}^{m \times n}$ die Stelle, an der P abgeleitet wird, und $(H, K) \in \mathbb{R}^{l \times m} \times \mathbb{R}^{m \times n}$ der Differenzvektor. Wir versehen den Raum $\mathbb{R}^{l \times m} \times \mathbb{R}^{m \times n}$ mit der Norm $\|H\| + \|K\|$, vergleiche Beispiel 2.15. Wie oben betrachten wir

$$P((A, B) + (H, K)) - P(A, B) = (A + H)(B + K) - AB = AK + HB + HK,$$

Hier ist der in (H, K) lineare Anteil gerade die Abbildung $\mathbb{R}^{l \times m} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{l \times n}$; $(H, K) \mapsto AK + HB$. Wir berechnen damit

$$\begin{aligned} & \|P(A+H, B+K) - P(A, B) - (AK + HB)\| \\ &= \|HK\| \leq \|H\| \|K\| \leq \frac{1}{2}(\|H\| + \|K\|)^2 = \frac{1}{2} \|(H, K)\|^2, \end{aligned}$$

wobei Satz 2.37 eingeht. Also ist P bei jedem $(A, B) \in \mathbb{R}^{l \times m} \times \mathbb{R}^{m \times n}$ differenzierbar und die Ableitung ist durch $P'(A, B)(H, K) = AK + HB$ gegeben. Spezialfälle sind das Skalarprodukt für $l = 1 = n$ oder das Matrix-Vektor-Produkt für $n = 1$. $\diamond$

Beim letzten Beispiel und bei den folgenden Ableitungsregeln beachte man, dass Operatoren in der Regel nicht kommutieren. Die Regeln entsprechen ansonsten genau denen in Analysis 1, die Beweise unterscheiden sich allerdings. Die Produktregel behandeln wir im Anschluss. Beispiele betrachten wir dann nach Theorem 3.13. Die deutlich schwierigere Umkehrregel ist $\mathbb{R}^m$ wird erst in Theorem 3.36 gezeigt.

SATZ 3.11. Seien $D \subseteq V$ offen, $x \in D$ und $f : D \rightarrow W$ differenzierbar bei x . Dann gelten die folgenden Aussagen.

a) Seien $g : D \rightarrow W$ bei x differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha f + \beta g : D \rightarrow W$ bei x differenzierbar und erfüllt $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$.

b) Seien Z ein endlichdimensionaler normierter Vektorraum, $\tilde{D} \subseteq W$ offen mit $f(D) \subseteq \tilde{D}$ und $g : \tilde{D} \rightarrow Z$ bei $y = f(x)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f : D \rightarrow Z$ bei x differenzierbar und erfüllt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x). \quad (\text{Kettenregel})$$

BEWEIS. Es gibt $r_0 > 0$ mit $B(x, r_0) \subseteq D$. Sei $h \in B_V(0, r_0) \setminus \{0\}$. Wir ‘raten’ die Ableitungen passend zu Analysis 1 und prüfen dann (3.2) recht direkt nach.

a) Aus (3.2) folgt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|h\|} \|\alpha f(x+h) + \beta g(x+h) - (\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f'(x) + \beta g'(x))h\| \\ & \leq \frac{|\alpha|}{\|h\|} \|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\| + \frac{|\beta|}{\|h\|} \|g(x+h) - g(x) - g'(x)h\| \\ & \longrightarrow 0, \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

b) Es sei $u = g \circ f$. Wir schreiben

$$\begin{aligned} R_u(h) &:= u(x+h) - u(x) - g'(f(x))f'(x)h \\ &= \left\{ g(f(x+h)) - g(f(x)) - g'(f(x))(f(x+h) - f(x)) \right\} \\ &\quad + g'(f(x))\left[f(x+h) - f(x) - f'(x)h \right] \end{aligned}$$

und setzen $w = f(x+h) - f(x)$, $R_g(w) = \{\dots\}$ und $R_f(h) = [\dots]$. Hier haben wir bei $g'(f(x))$ die Differenz w der Argumente von g ergänzt, was erfreulicherweise gerade auf den gewünschten Ausdruck $R_f(h)$ führt.

Satz 3.9 liefert solche Konstanten $c \geq 1$ und $r \in (0, r_0)$, dass für alle $h \in \overline{B}_V(0, r)$ die Ungleichung $\|w\|_W \leq c \|h\|_V$ gilt. (Falls nötig vergrößern wir c , bzw. verkleinern $r > 0$, in Satz 3.9.) Es gibt einen Radius $\rho > 0$ mit $\overline{B}(f(x), \rho) \subseteq \tilde{D}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta > 0$ wie in Bemerkung 3.8 a) für die Ausdrücke R_g und R_f , wobei wir $\delta \leq \min\{r, \rho\}$ annehmen können. Sei $\|h\|_V \leq \delta/c \leq \delta \leq r$ und somit $\|w\|_W \leq c \|h\|_V \leq \delta \leq \rho$. Mittels Satz 2.37 zur Operatornorm und Bemerkung 3.8 a) berechnen wir nun

$$\begin{aligned} \|R_u(h)\|_Z &\leq \|R_g(w)\|_Z + \|g'(f(x))\|_{L(W,Z)} \|R_f(h)\|_W \\ &\leq \varepsilon \|w\|_W + \|g'(f(x))\|_{L(W,Z)} \varepsilon \|h\|_V \\ &\leq \varepsilon (c + \|g'(f(x))\|_{L(W,Z)}) \|h\|_V. \end{aligned}$$

Wegen Bemerkung 3.8 a) zeigt dies die Kettenregel. $\square$

Aus der Kettenregel folgern wir die *Produktregel* sogar für matrizenwertige Funktionen. Mit mehr Aufwand könnte man den Beweis auch direkt mit (3.2) und Satz 3.9 führen. Man beachte, dass die Ableitung von $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{l \times m}$ bei $x \in \mathbb{R}^d$ eine lineare Abbildung $F'(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{l \times m}$ ist; d.h., $[F'(x)h]$ ist für jedes $h \in \mathbb{R}^d$ eine $l \times m$ Matrix. Man stellt $F'(x)$ durch Koeffizienten a_{ijk} dar, etwa mit Indizes $i \in \{1, \dots, l\}$, $j \in \{1, \dots, d\}$ und $k \in \{1, \dots, m\}$. (Wir modifizieren hier unsere Bezeichnungskonventionen ein wenig.)

SATZ 3.12. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, sowie $F : D \rightarrow \mathbb{R}^{l \times m}$ und $G : D \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ bei $x \in D$ differenzierbar. Dann besitzt das Produkt $FG : D \rightarrow \mathbb{R}^{l \times n}$ bei x die Ableitung

$$(FG)'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{l \times n}).$$

BEWEIS. Wir setzen $U : D \rightarrow \mathbb{R}^{l \times n}$; $U(x) = F(x)G(x)$. Um U abzuleiten, betrachten wir die Funktionen $P : \mathbb{R}^{l \times m} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{l \times n}$; $P(A, B) = AB$, und $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^{l \times m} \times \mathbb{R}^{m \times n}$; $\Phi(x) = (F(x), G(x))$. Dann gilt $U = P \circ \Phi$. Beispiel 3.10 c) und eine Übung zeigen, dass die Ableitungen

$$P'(A, B)[H, K] = AK + HB \quad \text{bzw.} \quad \Phi'(x) = (F'(x), G'(x))$$

bei $(A, B) \in \mathbb{R}^{l \times m} \times \mathbb{R}^{m \times n}$ bzw. $x \in D$ existieren, wobei $(H, K) \in \mathbb{R}^{l \times m} \times \mathbb{R}^{m \times n}$ ist. Nach Satz 3.11 ist dann U differenzierbar mit der Ableitung

$$U'(x) = P'(\Phi(x))\Phi'(x) = F(x)G'(x) + F'(x)G(x). \quad \square$$

Für $h \in \mathbb{R}^d$ bedeutet diese Produktregel

$$[(FG)'(x)h] = [F'(x)h]G(x) + F(x)[G'(x)h] \in \mathbb{R}^{l \times n}.$$

Spezialfälle sind die Multiplikation $f(x)g(x)$ in $\mathbb{R}$ (mit $l = m = n = 1$ und der Identifikation $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$), das Skalarprodukt $(f(x)|g(x))$ für $l = 1 = n$ oder das Matrix-Vektor-Produkt $F(x)g(x)$ für $n = 1$. Im⁵ Falle des Skalarproduktes mit differenzierbaren $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m \times 1}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^d$ beschreiben wir die Ableitung näher, die wir hier mit ∂_x bezeichnen. Satz 3.12 liefert

$$\begin{aligned} [\partial_x(f(x)|g(x))]h &= [\partial_x(f(x)^\top g(x))]h = [(f(x)^\top)'h]g(x) + f(x)^\top[g'(x)h] \\ &= (f'(x)h|g(x)) + (f(x)|g'(x)h) \end{aligned}$$

für $x \in D$ und $h \in \mathbb{R}^d$. Im letzten Schritt nutzen wir, dass (3.2) per Transposition

$$\frac{1}{\|h\|} \|f(x+h)^\top - f(x)^\top - (f'(x)h)^\top\| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0,$$

und damit die Existenz von $(f(x)^\top)'h = (f'(x)h)^\top$ liefert.

Mittels des nächsten zentralen Resultats wird in den typischen Beispielen im $\mathbb{R}^m$ recht einfach die Differenzierbarkeit gezeigt und die Ableitung berechnet (siehe etwa Beispiel 3.14). Man beachte, dass man wegen Beispiel 3.6 c) und Satz 3.9 in Behauptung b) auf die Stetigkeit der partiellen Ableitungen nicht verzichten kann.

THEOREM 3.13. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^l$, $x \in D$ und $f = (f_1 \cdots f_l)^\top$.

a) Sei f bei x differenzierbar. Dann existieren alle partiellen Ableitungen $\partial_k f_j(x)$ für $j \in \{1, \dots, l\}$ und $k \in \{1, \dots, m\}$ und die Ableitung $f'(x)$ wird bezüglich der Standardbasen $\{e_1, \dots, e_n\}$ mit $n \in \{l, m\}$ durch die Jacobimatrix

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \cdots & \partial_m f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_l(x) & \cdots & \partial_m f_l(x) \end{pmatrix} = [\partial_k f_j(x)]_{\substack{j=1, \dots, l \\ k=1, \dots, m}} =: \partial f(x)$$

dargestellt. (Wir identifizieren meist $f'(x) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ mit $\partial f(x) \in \mathbb{R}^{l \times m}$.)

b) Für ein $r > 0$ liege die Kugel $B(x, r)$ in D , für alle $j \in \{1, \dots, l\}$ und $k \in \{1, \dots, m\}$ existieren die partiellen Ableitungen $\partial_k f_j$ auf $B(x, r)$ und sie seien

⁵Die folgende Aussage wurde in der Vorlesung nicht behandelt.

stetig. Dann ist f bei jedem $y \in B(x, r)$ differenzierbar, wobei $f'(y)$ durch $\partial f(y)$ dargestellt wird. Weiter ist die Ableitung $f' : B(x, r) \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ stetig.

BEWEIS. a) Seien $B(x, r_0) \subseteq D$ und $k \in \{1, \dots, m\}$. Wir setzen $\varphi : (-r_0, r_0) \rightarrow \mathbb{R}^l$; $\varphi(t) = f(x + te_k)$, sowie $h = te_k$ für $t \in (-r_0, r_0) \setminus \{0\}$. Dann gelten

$$\left| \frac{1}{t}(\varphi(t) - \varphi(0)) - f'(x)e_k \right|_2 = \frac{1}{|h|_2} |f(x+h) - f(x) - f'(x)h|_2 \rightarrow 0$$

für $|h|_2 = |t| \rightarrow 0$, wobei wir (3.2) verwendet haben. Nach Definition 3.1 existiert also die Ableitung $\varphi'(0) = f'(x)e_k$. Für jedes $j \in \{1, \dots, l\}$ erhalten wir daraus die Gleichung $[f'(x)e_k]_j = \varphi'_j(0) = \partial_k f_j(x)$ gemäß Definition 3.4. Also wird $f'(x)$ durch $\partial f(x)$ bezüglich der Basen $\{e_1, \dots, e_m\}$ und $\{e_1, \dots, e_l\}$ dargestellt.

b) Seien $r > 0$ aus Behauptung b), $y \in B(x, r) \subseteq D$, und $j \in \{1, \dots, l\}$. Es gibt einen Radius $r_1 > 0$ mit $B(y, r_1) \subseteq B(x, r)$. Wähle $h \in B(0, r_1) \setminus \{0\}$. Dann gelten $h = h_1 e_1 + \dots + h_m e_m$ für die Komponenten $h_k \in [-|h|_2, |h|_2]$ von h und $|h_1 e_1 + \dots + h_k e_k|_2 \leq |h|_2$ für jedes $k \in \{1, \dots, m\}$. Wir schreiben nun

$$\begin{aligned} f_j(y+h) - f_j(y) &= f_j(y + h_1 e_1 + \dots + h_m e_m) - f_j(y + h_1 e_1 + \dots + h_{m-1} e_{m-1}) \\ &\quad + f_j(y + h_1 e_1 + \dots + h_{m-1} e_{m-1}) - f_j(y + h_1 e_1 + \dots + h_{m-2} e_{m-2}) \\ &\quad + \dots + f_j(y + h_1 e_1) - f_j(y). \end{aligned}$$

Der Mittelwertsatz Theorem 5.21 aus Analysis 1 liefert für die Funktion $\phi_1 : [-|h_1|, |h_1|] \rightarrow \mathbb{R}$; $\phi_1(t) = f_j(y + te_1)$, eine Zahl $\tau_1 \in (-|h_1|, |h_1|)$ mit $\phi_1(h_1) - \phi_1(0) = \phi'_1(\tau_1)h_1$. Nach Definition 3.4 bedeutet dies gerade

$$f_j(y + h_1 e_1) - f_j(y) = \partial_1 f_j(y + \tau_1 e_1) h_1.$$

Die anderen Differenzen behandelt man entsprechend. So erhalten wir Zwischenstellen $\tau_k \in (-|h_k|, |h_k|)$ mit

$$f_j(y+h) - f_j(y) = \sum_{k=1}^m \partial_k f_j(y + h_1 e_1 + \dots + h_{k-1} e_{k-1} + \tau_k e_k) h_k,$$

wobei $f_j(y + h_1 e_1 + \tau_1 e_1)$ gleich $f_j(y + \tau_1 e_1)$ sein soll. Man beachte, dass auch die 2-Norm der Vektoren $h_1 e_1 + \dots + h_{k-1} e_{k-1} + \tau_k e_k$ kleiner gleich $|h|_2$ ist. In Hinblick auf Definition 3.7 setzen wir

$$R_j(h) = f_j(y+h) - f_j(y) - [\partial_1 f_j(y) \cdots \partial_m f_j(y)]h = f_j(y+h) - f_j(y) - \sum_{k=1}^m \partial_k f_j(y) h_k.$$

Diese Formeln führen auf die Abschätzung

$$\begin{aligned} |R_j(h)| &\leq \sum_{k=1}^m |\partial_k f_j(y + h_1 e_1 + \dots + h_{k-1} e_{k-1} + \tau_k e_k) h_k - \partial_k f_j(y) h_k| \\ &\leq \max_{k \in \{1, \dots, m\}, z \in \overline{B}(y, |h|_2)} |\partial_k f_j(z) - \partial_k f_j(y)| (|h_1| + \dots + |h_m|) \\ &\leq \sqrt{m} |h|_2 \max_{k \in \{1, \dots, m\}, z \in \overline{B}(y, |h|_2)} |\partial_k f_j(z) - \partial_k f_j(y)|, \end{aligned}$$

wobei wir Satz 2.8 verwendet haben. Aus dieser Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{|h|_2} |f(y+h) - f(y) - \partial f(y)h|_2 &= \frac{1}{|h|_2} \left(\sum_{j=1}^l |R_j(h)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{l}}{|h|_2} \max_{j \in \{1, \dots, l\}} |R_j(h)| \\ &\leq \frac{\sqrt{lm} |h|_2}{|h|_2} \max_{j,k} \max_{z \in \bar{B}(y, |h|_2)} |\partial_k f_j(z) - \partial_k f_j(y)|. \end{aligned}$$

Da die Funktionen $\partial_k f_j$ auf $B(y, r_1)$ stetig sind, konvergiert der obige Ausdruck für $|h|_2 \rightarrow 0$ gegen 0. Also ist f bei $y \in B(x, r)$ differenzierbar und $f'(y) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ wird durch die Matrix $\partial f(y)$ dargestellt. Da $y \mapsto \partial f(y)$ nach Voraussetzung komponentenweise stetig ist, liefert Beispiel 2.38 b) die Stetigkeit der Abbildung $y \mapsto f'(y) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$. $\square$

BEISPIEL 3.14. Die Komponenten der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{xy^2} \\ \sin x \\ x^2 + xy \end{pmatrix},$$

sind gemäß Analysis 1 stetig partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$. Laut Theorem 3.13 ist somit f differenzierbar mit der stetigen Ableitung

$$f' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 2}; \quad f'(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 e^{xy^2} & 2xy e^{xy^2} \\ \cos x & 0 \\ 2x + y & x \end{pmatrix}. \quad \diamond$$

In der nächsten Folgerung reformulieren wir Theorem 3.13 und kombinieren es mit der Kettenregel, um diese auch in Koordinaten auszudrücken. Man beachte, dass für $m = 1$ die Definition in Teil a) mit Definition 3.1 übereinstimmt.

KOROLLAR 3.15. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen.

a) Es gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} C^1(D, \mathbb{R}^l) &:= \left\{ f : D \rightarrow \mathbb{R}^l \mid f \text{ ist differenzierbar, } f' : D \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l) \text{ ist stetig} \right\} \\ &= \left\{ f : D \rightarrow \mathbb{R}^l \mid \forall j \in \{1, \dots, l\}, k \in \{1, \dots, m\} \exists \partial_k f_j \in C(D, \mathbb{R}) \right\}. \end{aligned}$$

Eine Funktion f in $C^1(D, \mathbb{R}^l)$ heißt stetig differenzierbar.

b) Seien $f \in C^1(D, \mathbb{R}^l)$, $\tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^l$ offen mit $f(D) \subseteq \tilde{D}$, $g \in C^1(\tilde{D}, \mathbb{R}^d)$, $x \in D$ und $y = f(x) \in \tilde{D}$. Dann liegt $g \circ f$ in $C^1(D, \mathbb{R}^d)$ und für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ und $k \in \{1, \dots, m\}$ gilt die Formel

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_i(f(x))}{\partial x_k} &= (\partial_k (g_i \circ f))(x) = [g'(f(x))f'(x)]_{ik} = \sum_{j=1}^l (\partial_j g_i)(f(x)) \partial_k f_j(x) \\ &= \sum_{j=1}^l \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x). \end{aligned}$$

BEWEIS. Die Inklusion ‘ $\supseteq$ ’ in a) folgt aus Theorem 3.13 b). Bei der Umkehrung zeigt Teil a) dieses Theorems die Existenz der partiellen Ableitungen und dass sie die Komponenten der Darstellungsmatrix von $f'(x)$ bilden. Damit ergibt sich die Stetigkeit der partiellen Ableitungen mittels Beispiel 2.38 b).

Die Aussage b) ist eine Konsequenz der Kettenregel Satz 3.11, von Theorem 3.13 und der Definition der Matrizenmultiplikation, wobei wir Ableitungen und ihre Jakobimatrizen identifizieren. $\square$

Wir diskutieren weitere Beispiele zu Theorem 3.13, nun auch in Kombination mit der Kettenregel in Satz 3.11.

BEISPIEL 3.16. a) Sei $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^3$; $f(x) = (\cos(|x|_2) \sin(|x|_2) |x|_2)^\top$. Wir schreiben $f = g \circ N$ für $N : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$; $N(x) = |x|_2$, und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$; $g(s) = (\cos(s) \sin(s) s)^\top$. Nach Beispiel 3.6 und Theorem 3.13 ist N auf $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ differenzierbar mit der Ableitung $N'(x) = (x_1/|x|_2 \dots x_m/|x|_2)$. Mittels Theorem 3.13 sehen wir weiter, dass g bei jedem $s \in \mathbb{R}$ die (in s stetige) Ableitung $g'(s) = (-\sin(s) \cos(s) 1)^\top \in \mathbb{R}^3$ besitzt. Gemäß der Kettenregel existiert nun für $x \neq 0$ die Ableitung

$$f'(x) = g'(|x|_2)N'(x) = \frac{1}{|x|_2} \begin{pmatrix} -x_1 \sin |x|_2 & \cdots & -x_m \sin |x|_2 \\ x_1 \cos |x|_2 & \cdots & x_m \cos |x|_2 \\ x_1 & \cdots & x_m \end{pmatrix}.$$

(Das Produkt eines Spaltenvektors mit einem Zeilenvektor ergibt eine Matrix.)

b) Seien $f, g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ und $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$; $v(t) = u(f(t), g(t))$. Um die Kettenregel anzuwenden, verwenden wir die Abbildung $\phi = (f \ g)^\top : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, die gemäß einer Übung die stetige Ableitung $(f' \ g')^\top$ hat. Nach Satz 3.11 und Theorem 3.13 liegt v dann in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ mit der Ableitung

$$\begin{aligned} v'(t) &= u'(\phi(t))\phi'(t) = \begin{pmatrix} \partial_1 u_1(\phi(t)) & \partial_2 u_1(\phi(t)) \\ \partial_1 u_2(\phi(t)) & \partial_2 u_2(\phi(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1 u_1(f(t), g(t))f'(t) + \partial_2 u_1(f(t), g(t))g'(t) \\ \partial_1 u_2(f(t), g(t))f'(t) + \partial_2 u_2(f(t), g(t))g'(t) \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

c) Wir betrachten die (ebenen) *Polarkoordinaten*

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Wieder wegen Theorem 3.13 liegt Φ in $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit Ableitung

$$\Phi'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det \Phi'(r, \varphi) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$. Also ist $\Phi'(r, \varphi) \in L(\mathbb{R}^2)$ für $r \neq 0$ bijektiv (siehe etwa Satz 3.1.3 in [3]), was wir in Beispiel 3.38 wieder aufgreifen.

Wir diskutieren Abbildungseigenschaften von Φ . Für einen gegebenen Punkt $v = (x \ y)^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ setzen wir $r = |v|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$. Weiter sei $\varphi \in [0, 2\pi)$ der Winkel im Gegenuhrzeigersinn zwischen der positiven x -Achse und v . Wir setzen $z = \frac{1}{r}v$. Dann ist $|z|_2 = 1$. Nach dem Beweis von Satz 4.49 in Analysis 1 gelten $z = (\cos(\varphi) \ \sin(\varphi))^\top$ und

$$\varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{r}, & y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{r}, & y < 0. \end{cases}$$

Dabei ist $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig bestimmt. Folglich sind die Einschränkungen

$$\Phi : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \text{und} \quad \Phi : \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\})$$

bijektiv. Für $r > 0$ bildet Φ die Strecke $\{r\} \times [0, 2\pi)$ bijektiv auf die Kreislinie $S(0, r)$ ab. Auf größeren Intervallen für φ verliert Φ die Injektivität.

d) Seien $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und Φ aus Teil c). Nach Korollar 3.15 liegt $F := f \circ \Phi$ in $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit der Ableitung

$$\begin{aligned} (\partial_r F(r, \varphi) \ \partial_\varphi F(r, \varphi)) &= F'(r, \varphi) = f'(\Phi(r, \varphi)) \Phi'(r, \varphi) \\ &= (\partial_x f(x, y) \ \partial_y f(x, y)) \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= (\partial_x f(x, y) \cos \varphi + \partial_y f(x, y) \sin \varphi \quad \partial_y f(x, y) r \cos \varphi - \partial_x f(x, y) r \sin \varphi), \end{aligned}$$

wobei wir $(x, y) = \Phi(r, \varphi)$ setzen, sowie etwa ∂_x und ∂_r statt ∂_1 schreiben. Wir haben also $\partial_r F(r, \varphi)$ und $\partial_\varphi F(r, \varphi)$ durch $\partial_x f(x, y)$ und $\partial_y f(x, y)$ ausgedrückt. Diese Gleichungen kann man (falls $r > 0$) nach $\partial_x f$ und $\partial_y f$ auflösen: Wir multiplizieren die erste Komponente der abgesetzten Gleichung mit $\cos \varphi$ und die zweite mit $-r^{-1} \sin \varphi$, und erhalten in der Summe

$$\cos(\varphi) \partial_r F - r^{-1} \sin(\varphi) \partial_\varphi F = \partial_x f (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + 0 = \partial_x f$$

und analog

$$\sin(\varphi) \partial_r F + r^{-1} \cos(\varphi) \partial_\varphi F = \partial_y f,$$

wobei wir die Argumente von f und F weglassen. Kurz gefasst, gelten also die Beziehungen

$$\begin{aligned} \partial_r &= \cos(\varphi) \partial_x + \sin(\varphi) \partial_y, & \partial_\varphi &= -r \sin(\varphi) \partial_x + r \cos(\varphi) \partial_y, \\ \partial_x &= \cos(\varphi) \partial_r - \frac{\sin(\varphi)}{r} \partial_\varphi, & \partial_y &= \sin(\varphi) \partial_r + \frac{\cos(\varphi)}{r} \partial_\varphi. \end{aligned}$$

Als einfaches Beispiel betrachten wir $\psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}; \varphi \mapsto \psi(\varphi)$. Dann gelten $(\partial_x g(x, y) \ \partial_y g(x, y)) = \psi'(\varphi) r^{-1} (-\sin \varphi \ \cos \varphi)$. Funktionen, die nur von $r = |x|_2$ abhängen, haben wir schon in Teil a) und Beispiel 3.6 direkter behandelt. Wir werden Transformationen wie Φ später noch etwas vertiefen. $\diamond$

Für Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ können wir $f'(x) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ nur als Zeilenvektor darstellen. Oft sind Spaltenvektoren bequemer, was auf den nächsten Begriff führt.

DEFINITION 3.17. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ bei $x \in D$ differenzierbar. Man definiert den Gradienten von f bei x durch

$$\nabla f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_m f(x) \end{pmatrix} = f'(x)^\top \in \mathbb{R}^m.$$

Also gilt $f'(x)h = (\nabla f(x)|h)$ für alle $h \in \mathbb{R}^m$.

In Beispiel 3.16 a) erhalten wir $\nabla N(x) = \frac{1}{|x|_2}x$ für $N(x) = |x|_2$ und $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Wir verallgemeinern nun den Begriff der partiellen Ableitung ein wenig.

DEFINITION 3.18. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Die Ableitung von f bei x in Richtung v ist (soweit existent)

$$\partial_v f(x) = \frac{\partial f}{\partial v}(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + tv) - f(x)) \in \mathbb{R}.$$

Hierbei betrachten wir $0 < |t| < \frac{r}{|v|_2}$, wobei $r > 0$ mit $B(x, r) \subseteq D$ gewählt ist. Es gilt $\partial_{e_j} = \partial_j$. Man kann $\partial_v f(x)$ als Zuwachsrate in Richtung v interpretieren.

Die Existenz aller Richtungsableitungen bei $x \in D$ impliziert *nicht* die Differenzierbarkeit. Dazu erinnern wir an $\mathbb{1}_S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ aus Beispiel 2.31 e) für die Spirale $S = \{v(s) = (1-s)(\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)) \mid s \in [0, 1]\}$. Diese Funktion ist bei $(0, 0)$ unstetig (und damit nicht differenzierbar). Für jedes $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist sie aber auf $\{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ bis auf zwei Stellen konstant gleich 0. Also gilt $\partial_v \mathbb{1}_S(0, 0) = 0$.

Der nächste Satz beschreibt wichtige Eigenschaften des Gradienten und berechnet die Richtungsableitungen durch ihn.

SATZ 3.19. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ und $x \in D$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

- a) Es existiert $\partial_v f(x) = (\nabla f(x)|v) = \sum_{k=1}^m v_k \partial_k f(x)$.
- b) Es gilt $|\nabla f(x)|_2 = \max\{|\partial_v f(x)| \mid v \in \mathbb{R}^m, |v|_2 = 1\}$. Falls $\nabla f(x) \neq 0$ ist, erhält man $|\nabla f(x)|_2 = \partial_w f(x)$ für $w := |\nabla f(x)|_2^{-1} \nabla f(x)$ (wobei $|w|_2 = 1$ ist).

BEWEIS. a) Sei $\varphi(t) = x + tv$ für $t \in \mathbb{R}$. Dann liegt φ in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ und es gelten $\varphi'(t) = v$ und $\varphi(0) = x$. Wir wählen einen Radius $r > 0$ mit $B(x, r) \subseteq D$ und setzen $u : (-r/|v|_2, r/|v|_2) \rightarrow \mathbb{R}$; $u(t) = f(\varphi(t))$. Nach den obigen Definitionen und der Kettenregel Satz 3.11 erfüllt die Richtungsableitung

$$\partial_v f(x) = u'(0) = f'(\varphi(0))\varphi'(0) = (\nabla f(x)|v).$$

- b) Sei $|v|_2 = 1$. Dann liefern Teil a) und die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung

$$|\partial_v f(x)| = |(\nabla f(x)|v)| \leq |\nabla f(x)|_2 |v|_2 = |\nabla f(x)|_2,$$

sodass $|\nabla f(x)| \geq \sup\{|\partial_v f(x)| \mid v \in \mathbb{R}^m, |v|_2 = 1\}$ ist. Im Falle $\nabla f(x) = 0$ folgt $\partial_v f(x) = 0$ aus Behauptung a), und b) gilt. Andernfalls impliziert a) die Identität

$$\partial_w f(x) = (\nabla f(x)|w) = |\nabla f(x)|_2^{-1} (\nabla f(x)|\nabla f(x)) = |\nabla f(x)|_2.$$

Somit ist auch b) gezeigt. □

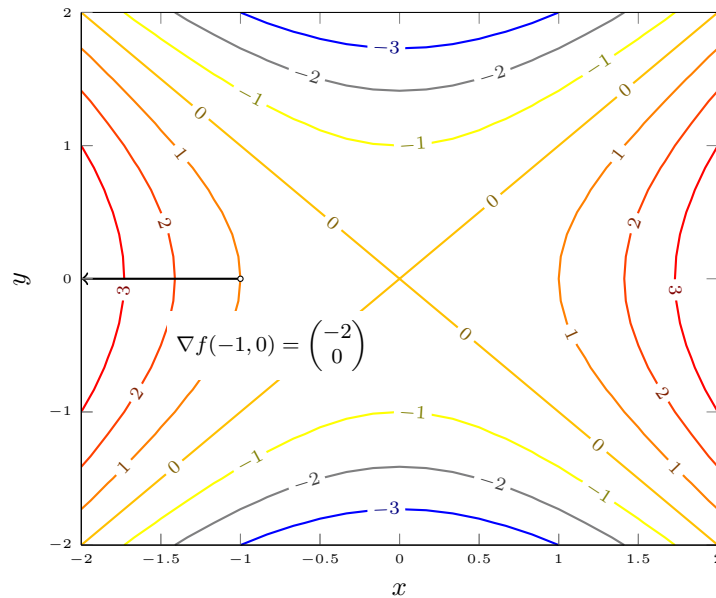
Wir interpretieren den Gradienten geometrisch.

BEMERKUNG 3.20. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ und $c \in f(D)$. Eine *Höhenlinie* (oder Niveaulinie) von f ist eine C^1 -Kurve $\varphi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\varphi(t) \in D$ und $u(t) := f(\varphi(t)) = c$ für alle $t \in (-1, 1)$. Die Kurve $t \mapsto (\varphi(t), f(\varphi(t)))$ verläuft also mit konstanter ‘Höhe’ c auf dem Graphen $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x \in D\}$ von f . Seien $\varphi(0) = x$ und $\varphi'(0) \neq 0$. Mit der Kettenregel folgt

$$0 = u'(0) = (\nabla f(\varphi(0)) | \varphi'(0)) = (\nabla f(x) | \varphi'(0)).$$

Somit steht $\nabla f(x)$ senkrecht auf der Tangentenrichtung $\varphi'(0)$ der Höhenlinie. Weiter weist $\nabla f(x)$ nach Satz 3.19 in die Richtung des stärksten Anstiegs von f .

Als Beispiel betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f(x, y) = x^2 - y^2$, deren Graph die Sattelfläche $\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ ist. Für $c \in \mathbb{R}$ sind ihre Höhenlinien durch $y = \pm\sqrt{x^2 - c}$ gegeben, wobei $x^2 \geq c$ gilt. Hier ist $\nabla f(x, y) = 2(x \ -y)^\top$. Wir zeigen einige Höhenlinien von f (mit der Angabe von c) in einem Schaubild. $\diamond$



Wir verallgemeinern den *Mittelwertsatz* aus Analysis 1 auf reellwertige Funktionen, die auf Teilmengen des $\mathbb{R}^m$ definiert sind.

SATZ 3.21. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ und $x, y \in D$ mit $x + t(y - x) \in D$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann gibt es eine Zwischenstelle $\tau \in (0, 1)$ mit

$$f(y) - f(x) = (\nabla f(x + \tau(y - x)) | y - x).$$

BEWEIS. Die Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; g(t) = f(x + t(y - x))$, ist stetig. Nach der Kettenregel Satz 3.11 ist g auch differenzierbar mit Ableitung $g'(t) = (\nabla f(x + t(y - x)) | y - x)$ für $t \in (0, 1)$. Theorem 5.21 aus Analysis 1 liefert ein Zwischenstelle $\tau \in (0, 1)$ mit $g'(\tau) = g(1) - g(0) = f(y) - f(x)$. $\square$

BEMERKUNG 3.22. a) Der Mittelwertsatz ist im Allgemeinen für $f \in C^1(D, \mathbb{R}^l)$ mit $l \geq 2$ falsch, wie das Beispiel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$; $f(t) = (\cos t \ \sin t)^\top$, zeigt. Hier gilt $f(2\pi) - f(0) = 0 \neq (2\pi - 0)f'(\tau) = 2\pi(-\sin \tau \ \cos \tau)^\top$ für jedes $\tau \in [0, 2\pi]$.

b) Im Mittelwertsatz benötigt man eine Konvexitätsannahme auch im Falle $m = 1$. Dies sieht man an der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$; $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$, bei der wir $f(1) - f(-1) = 1 \neq 2f'(\tau) = 0$ für alle $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ erhalten. $\diamond$

Statt des Mittelwertsatzes verwendet man im $\mathbb{R}^l$ oft den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung für Funktionen $v \in C([a, b], \mathbb{R}^l)$. Man definiert hier das Integral wie im reellen Fall in Abschnitt 1.1 mittels Riemannscher Summen

$$S(v, Z_n) = \sum_{k=1}^{m_n} v(\tau_k^{(n)})(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)})$$

für markierte Zerlegungen

$$Z_n = \{(t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{m_n}^{(n)}), (\tau_1^{(n)}, \dots, \tau_{m_n}^{(n)}) \mid t_0^{(n)} = a < t_1^{(n)} < \dots < t_{m_n}^{(n)} = b, \\ \tau_k^{(n)} \in [t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}] \text{ für alle } k \in \{1, \dots, m_n\}\}$$

wobei $m_n \in \mathbb{N}$ ist und $\max\{t_1^{(n)} - t_0^{(n)}, \dots, t_{m_n}^{(n)} - t_{m_n-1}^{(n)}\} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gelte. Indem man den Betrag $|\cdot|$ durch die Norm $|\cdot|_2$ ersetzt, zeigt man wie in Theorem 1.4 die Konvergenz der Folge $(S(v, Z_n))_n$ gegen eine Zahl J , die nicht von der Wahl der Zerlegungen Z_n abhängt. Man schreibt dann $J = \int_a^b v(t) dt$.

Seien $v, w \in C([a, b], \mathbb{R}^l)$, $c \in (a, b)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wie in Satz 1.6 erhält man

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha v(t) + \beta w(t)) dt &= \alpha \int_a^b v(t) dt + \beta \int_a^b w(t) dt, \\ \int_a^b v(t) dt &= \int_a^c v(t) dt + \int_c^b v(t) dt, \\ \left| \int_a^b v(t) dt \right|_2 &\leq \int_a^b |v(t)|_2 dt \leq (b-a) \max_{a \leq t \leq b} |v(t)|_2. \end{aligned}$$

Weiter ist die j -te Komponente von $S(v, Z_n)$ gleich der skalaren Riemann-Summe $S(v_j, Z_n)$, wobei $v = (v_1 \ \dots \ v_l)^\top$ gelte. Im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ ergibt sich daraus

$$\int_a^b v(t) dt = \left(\int_a^b v_1(t) dt \quad \dots \quad \int_a^b v_l(t) dt \right)^\top. \quad (3.3)$$

Der Hauptsatz Theorem 1.10 in $\mathbb{R}$ und Bemerkung 3.2 liefert damit

$$\exists \frac{d}{dt} \int_a^t v(s) ds = \left(\frac{d}{dt} \int_a^t v_1(s) ds \quad \dots \quad \frac{d}{dt} \int_a^t v_l(s) ds \right)^\top = v(t), \quad (3.4)$$

$$\int_a^b w'(t) dt = \left(\int_a^b w'_1(t) dt \quad \dots \quad \int_a^b w'_l(t) dt \right)^\top = w(b) - w(a) \quad (3.5)$$

für $t \in [a, b]$ und $w \in C^1([a, b], \mathbb{R}^l)$. Für eine Matrix $A = [a_{ij}] \in L(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^d)$ erhalten wir auf Grund der Linearität des Integrals schließlich

$$A \int_a^b v(t) dt = \left(\sum_{j=1}^l a_{ij} \int_a^b v_j(t) dt \right)_{i=1, \dots, d} = \int_a^b Av(t) dt. \quad (3.6)$$

Wir nutzen den Hauptsatz nun aus, um das zentrale Kriterium für Lipschitz Stetigkeit zu erhalten. Konvexität wurde in Beispiel 2.57 eingeführt; zum Beispiel ist $\overline{B}(x, r) \subseteq \mathbb{R}^m$ konvex und kompakt.

SATZ 3.23. *Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^l)$, $K \subseteq D$ kompakt und konvex. Dann gilt*

$$|f(x) - f(y)|_2 \leq \max_{z \in K} \|f'(z)\| |x - y|_2 \quad \text{für alle } x, y \in K.$$

Sei ferner D konvex und $\|f'(x)\| \leq M$ gelte für eine Konstante $M \geq 0$ und alle $x \in D$. Dann ist f Lipschitz stetig auf D mit der Konstanten M .

BEWEIS. Auf Grund der Stetigkeit von f' auf D , ist die Abbildung $z \mapsto \|f'(z)\|$ auf K durch eine Konstante M_K beschränkt (nach dem Satz vom Maximum Theorem 2.50). Seien $x, y \in K$. Mit dem Hauptsatz (3.5), der Kettenregel und Satz 2.37 zur Operatornorm erhalten wir

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)|_2 &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x + t(y - x)) dt \right|_2 = \left| \int_0^1 f'(x + t(y - x))(y - x) dt \right|_2 \\ &\leq \int_0^1 \|f'(x + t(y - x))\| |y - x|_2 dt \leq M_K |y - x|_2. \end{aligned}$$

Die zweite Behauptung zeigt man genauso. □

Man kann die zweite Aussage im Korollar auf gewisse nichtkonvexe D (mit einer Konstante $c_D M$) verallgemeinern, aber für beliebige offene D gilt sie nicht. Als Beispiel betrachten wir das geschlitzte Quadrat $D = (-1, 1)^2 \setminus ([0, 1] \times \{0\})$ und die Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x, y) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in (-1, 1), y \in (0, 1), \\ -\varphi(x), & x \in (-1, 1), y \in (-1, 0), \\ 0, & x \in (-1, 0], y = 0, \end{cases}$$

wobei $\varphi \in C^1((-1, 1), \mathbb{R})$ auf $(-1, \frac{1}{4})$ gleich 0 und auf $(\frac{1}{2}, 1)$ gleich 1 sei. Dann ist f stetig differenzierbar mit beschränkter Ableitung, aber nicht Lipschitz stetig, da

$$|f(\frac{1}{2}, \frac{1}{n}) - f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{n})| = 2 > \frac{2L}{n} = L |(\frac{1}{2}, \frac{1}{n}) - (\frac{1}{2}, -\frac{1}{n})|_2.$$

für jedes $L \geq 1$ und alle $n > L$ gilt.

3.2. Satz von Taylor und lokale Extrema

Wir werden in diesem Abschnitt den Satz von Taylor auch im $\mathbb{R}^m$ beweisen und aus ihm Kriterien für lokale Minima und Maxima gewinnen. Wir diskutieren diese Fragen aber nicht ganz so ausführlich wie in Analysis 1.

Wir hatten in Definition 3.4 höhere partielle Ableitungen eingeführt. Für eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{R}^m$, eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^l$ und ein $n \in \mathbb{N}$ setzen wir nun

$$C^n(D, \mathbb{R}^l) = \left\{ f : D \rightarrow \mathbb{R}^l \mid \exists \partial_{k_\nu} \cdots \partial_{k_1} f_j \in C(D, \mathbb{R}^l) \text{ für alle } \nu \in \{1, \dots, n\}, \right. \\ \left. k_1, \dots, k_\nu \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, l\} \right\}.$$

Eine Funktion f aus $C^n(D, \mathbb{R}^l)$ heißt *n-fach stetig partiell differenzierbar*.

Man kann auch Definition 3.7 iterieren, um höhere Ableitungen von f zu definieren (siehe etwa Abschnitt VII.5 in [2]). Da diese Begriffe technisch etwas unangenehm sind, verzichten wir in dieser Vorlesung auf sie (bis auf den Spezialfall in Bemerkung 3.25) und beschränken uns auf höhere partielle Ableitungen.

Der folgende wichtige Satz vom *Schwarz* impliziert iterativ, dass man n -fache höhere partielle Ableitungen vertauschen kann, wenn f in $C^n(D, \mathbb{R}^l)$ liegt. In einer Übung wird eine recht einfache rationale Funktion angegeben, deren partielle Ableitungen existieren, aber nicht kommutieren.

THEOREM 3.24. *Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $B(x_0, r) \subseteq D$ für ein $r > 0$ derart, dass auf $B(x_0, r)$ die partiellen Ableitungen $\partial_j f, \partial_k f, \partial_j \partial_k f$ existieren und stetig sind. Dann existiert auch $\partial_k \partial_j f(x)$ und es gilt*

$$\partial_k \partial_j f(x) = \partial_j \partial_k f(x) \quad \text{für alle } x \in B(x_0, r).$$

BEWEIS. Wir beweisen den Satz nur für $m = 2, j = 1, k = 2$ und $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ statt $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Den allgemeinen Fall zeigt man entsprechend. Man approximiert die gesuchte Ableitung $\partial_2 \partial_1 f$ durch einen Differenzenquotienten in x und y , wobei man zuerst den Limes in x und dann den in y ausführt. Dies gelingt mit Hilfe der Stetigkeit von $\partial_1 \partial_2 f$ und des Mittelwertsatzes Theorem 5.21 aus Analysis 1.

Seien (x, y) in der Kugel $B((x_0, y_0), r)$ in $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_2)$. Auf Grund der vorausgesetzten Stetigkeit gibt es so einen Radius $\delta = \delta_\varepsilon > 0$, dass die Maximumsnorm-Kugel $\overline{B}_{|\cdot|_\infty}((x, y), \delta)$ in $B((x_0, y_0), r)$ liegt und die Ungleichung

$$|\partial_1 \partial_2 f(\xi, \eta) - \partial_1 \partial_2 f(x, y)| \leq \varepsilon$$

für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ mit $|x - \xi| \leq \delta$ und $|y - \eta| \leq \delta$ gilt. Seien $t, s, z \in \mathbb{R}$ mit $0 < |t|, |s| \leq \delta$ und $|z - y| \leq \delta$. Wir definieren

$$u(z) = f(x + s, z) - f(x, z), \\ q(s, t) = f(x + s, y + t) - f(x, y + t) - (f(x + s, y) - f(x, y)).$$

Wir wenden nun Theorem 5.21 aus Analysis 1 zuerst auf die Funktion u und dann auf $\sigma \mapsto \partial_2 f(\sigma, \eta)$ an. Er liefert dabei Zwischenstellen $\eta \in \mathbb{R}$ mit $|y - \eta| \leq |t| \leq \delta$

bzw. $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|x - \xi| \leq |s| \leq \delta$, die die Gleichungen

$$q(s, t) = u(y + t) - u(y) = u'(\eta)t = (\partial_2 f(x + s, \eta) - \partial_2 f(x, \eta))t = \partial_1 \partial_2 f(\xi, \eta)st$$

erfüllen. Die oben abgesetzte Ungleichung führt auf die Abschätzung

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq \left| \frac{q(s, t)}{st} - \partial_1 \partial_2 f(x, y) \right| \\ &= \left| \frac{1}{t} \left(\frac{1}{s} (f(x + s, y + t) - f(x, y + t)) - \frac{1}{s} (f(x + s, y) - f(x, y)) \right) - \partial_1 \partial_2 f(x, y) \right| \end{aligned}$$

für alle $0 < |s|, |t| \leq \delta$. Für festes t lassen wir hier $s \rightarrow 0$ streben erhalten

$$\varepsilon \geq \left| \frac{1}{t} (\partial_1 f(x, y + t) - \partial_1 f(x, y)) - \partial_1 \partial_2 f(x, y) \right|$$

für alle $0 < |t| \leq \delta = \delta_\varepsilon$, da $\partial_1 f$ existiert. Diese Aussage besagt gerade, dass es die partielle Ableitung $\partial_2 \partial_1 f(x, y)$ gibt und sie gleich $\partial_1 \partial_2 f(x, y)$ ist. $\square$

BEMERKUNG 3.25. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ und $x \in D$. Dann liegt ∇f in $C^1(D, \mathbb{R}^m)$. Somit existiert die Ableitung $(\nabla f)' =: f'' \in C(D, L(\mathbb{R}^m))$ mit der Darstellungsmatrix (*Hessematrix*)

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x) & \cdots & \partial_m \partial_1 f(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 \partial_m f(x) & \cdots & \partial_m \partial_m f(x) \end{pmatrix} =: \nabla^2 f(x),$$

die nach Theorem 3.24 symmetrisch ist. Der *Laplace-Operator* Δ ist durch die Spur $\text{sp}(\nabla^2 f(x))$, also durch $\Delta f(x) = \partial_{11} f(x) + \dots + \partial_{mm} f(x)$, gegeben. $\diamond$

Der Laplaceoperator tritt z.B. in vielen der grundlegenden Gleichungen der Physik auf. Nicht nur deswegen ist er ein zentrales Objekt der Analysis. Wir diskutieren ihn ein wenig anhand von Beispielen, die auch zur Wiederholung der Kettenregel dienen.

BEISPIEL 3.26. a) Seien $m \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ und $f : D := \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x|_2^{2-m}$. Dann ist f harmonisch auf D ; d.h., f liegt in $C^2(D, \mathbb{R})$ und $\Delta f(x) = 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.

BEWEIS. Aus Beispiel 3.6 wissen wir, dass f die partielle Ableitung $\partial_k f(x) = (2 - m)|x|_2^{-m} x_k$ für alle $x \neq 0$ und $k \in \{1, \dots, m\}$ besitzt. Mittels Lemma 3.5 kann man dieses Beispiel nochmals anwenden und erhält

$$\partial_{kk} f(x) = (2 - m) \left((-m |x|_2^{-m-2} x_k x_k + |x|_2^{-m}) \right).$$

Ähnlich berechnet man die anderen zweiten partiellen Ableitungen. Offenbar sind alle diese partiellen Ableitungen auf D stetig. Eine Summation über k liefert

$$\Delta f(x) = \sum_{k=1}^m \partial_{kk} f(x) = (2 - m) |x|_2^{-m} \left(-m |x|^{-2} \sum_{k=1}^m x_k^2 + \sum_{k=1}^m 1 \right) = 0. \quad \square$$

b) Seien $\phi \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ und $u : D := \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$; $u(x) = \phi(|x|_2)$. Dann liegt u in $C^2(D, \mathbb{R})$ und erfüllt $\Delta u(x) = \phi''(|x|_2) + \frac{m-1}{|x|_2} \phi'(|x|_2)$ für alle $x \neq 0$.

BEWEIS. Die Kettenregel Satz 3.11 und Beispiel 3.6 zeigen zunächst, dass u in $C^1(D, \mathbb{R})$ mit $u'(x) = \phi'(|x|_2) |x|_2^{-1} x^\top$ ist. Aus Lemma 3.5 und diesem Beispiel schließen wir dann wieder, dass u in $C^2(D, \mathbb{R})$ liegt und die Gleichung

$$\partial_{kk} u(x) = \phi''(|x|_2) \frac{x_k}{|x|_2} \frac{x_k}{|x|_2} + \frac{\phi'(|x|_2)}{|x|_2} - \phi'(|x|_2) x_k |x|_2^{-3} x_k$$

für alle $x \neq 0$ und $k \in \{1, \dots, m\}$ erfüllt. Daraus ergibt sich wie oben

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \frac{\phi''(|x|_2)}{|x|_2^2} \sum_{k=1}^m x_k^2 + \frac{\phi'(|x|_2)}{|x|_2} \left(\sum_{k=1}^m 1 - \frac{1}{|x|_2^2} \sum_{k=1}^m x_k^2 \right) \\ &= \phi''(|x|_2) + \frac{m-1}{|x|_2} \phi'(|x|_2). \end{aligned} \quad \square$$

c) Seien $A \in L(\mathbb{R}^m)$ orthogonal (d.h., $A^\top$ ist die Inverse A^{-1}) und $u \in C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$. Dann gilt $\Delta u(x) = \Delta v(Ax)$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$, wobei $v(y) := u(A^{-1}y)$ für $y \in \mathbb{R}^m$.

BEWEIS. Wir haben $v = u \circ A^{-1}$ und damit $u = v \circ A$. Nach Beispiel 3.10 hat die lineare Abbildung $x \mapsto y = Ax$ die konstante Ableitung A . Gemäß der Kettenregel Satz 3.11 liegt dann v in $C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ und es ergibt sich $u'(x) = v'(Ax)A$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$. Da A orthogonal ist, folgen die Gleichungen

$$\nabla u(x) = (v'(Ax)A)^\top = A^\top v'(Ax)^\top = A^{-1} \nabla v(Ax).$$

Wir wenden nun noch einmal die Kettenregel und Beispiel 3.10 an. Somit liegt v in $C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ und es gilt

$$\Delta u(x) = \text{sp}((\nabla u)'(x)) = \text{sp}(A^{-1}(\nabla v)'(Ax)A) = \text{sp}(v''(Ax)) = \Delta v(Ax)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^m$. Hier verwenden wir, dass die Spur einer Matrix invariant unter Ähnlichkeitstransformationen ist, siehe etwa Abschnitt 4.2.2 in [3]. $\square$

Im folgenden zeigen wir die einfachste Version des *Taylorschen Satzes* im $\mathbb{R}^m$, die sich leicht aus den Resultaten in Analysis 1 ergibt. Für $f \in C^n(D, \mathbb{R})$ sind das n -te Taylorpolynom und das n -te Taylorrestglied bei x durch

$$T_{n,x}f(x+h) := f(x) + \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_\nu=1}^m h_{\alpha_1} \dots h_{\alpha_\nu} (\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_\nu} f)(x),$$

$$R_{n,x}f(x+h) := f(x+h) - T_{n,x}f(x+h)$$

gegeben, wobei $x, x+h \in D$ ist.

THEOREM 3.27. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^{n+1}(D, \mathbb{R})$, $x \in D$, $r > 0$ mit $\overline{B}(x, r) \subseteq D$ und $h \in \mathbb{R}^m$ mit $|h|_2 \leq r$. Dann gibt es eine Zahl $\tau \in (0, 1)$ mit

$$f(x+h) = T_{n,x}f(x+h) + \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}=1}^m h_{\alpha_1} \dots h_{\alpha_{n+1}} (\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_{n+1}} f)(x + \tau h) \quad (3.7)$$

und es ist $R_{n,x}f(x+h) = O(|h|_2^{n+1})$ für $h \rightarrow 0$. Für $n = 2$ gilt somit

$$f(x+h) = f(x) + (\nabla f(x)|h) + \frac{1}{2}(\nabla^2 f(x)h|h) + O(|h|_2^3) \quad \text{für } h \rightarrow 0, \quad (3.8)$$

Hier heißt $g(h) = O(|h|_2^k)$, dass $|g(h)| \leq c|h|_2^k$ für $|h|_2 \leq r$ und Konstanten $c, r > 0$ ist. Für $f \in C^{n+1}(D, \mathbb{R}^l)$ ist (3.7) schon für $n = 0$ im Allgemeinen falsch (siehe Bemerkung 3.22). Man kann aber Theorem 3.27 auf die Komponenten $f_j \in C^{n+1}(D, \mathbb{R})$ von f anwenden. Dann erhält man solche (im Allgemeinen verschiedene) Zwischenwerte $\tau_j \in (0, 1)$, dass die Gleichung

$$f_j(x+h) = T_{n,x}f_j(x+h) + \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}=1}^m h_{\alpha_1} \dots h_{\alpha_{n+1}} (\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_{n+1}} f_j)(x + \tau_j h)$$

für alle $j \in \{1, \dots, l\}$ und $h \in \mathbb{R}^m$ mit $|h|_2 \leq r$ gilt. Insbesondere folgt wieder

$$|f(x+h) - T_{n,x}f(x+h)|_2 = O(|h|_2^{n+1}) \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

In Bemerkung 3.34 besprechen wir eine Variante von Theorem 3.27, die Theorem 5.36 c) aus Analysis 1 entspricht. Für eine weitere analog zu Satz 1.14 verweisen wir auf Theorem VII.5.8 in [2].

BEWEIS VON THEOREM 3.27. Es seien $x \in D$ mit $\bar{B}(x, r) \subseteq D$ und $h \in \mathbb{R}^m$ mit $|h|_2 \leq r$. Nach Korollar 2.52 gibt es einen Radius $r' > r$ mit $B(x, r') \subseteq D$. Wir setzen $a = r'/r > 1$. Nun definieren wir $\varphi : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$; $\varphi(t) = f(x + th)$. Dabei ist $x + th$ in $B(x, r')$ enthalten.

Die Kettenregel Satz 3.11 zeigt, dass φ in $C^1((-a, a), \mathbb{R})$ liegt und die Ableitung

$$\varphi'(t) = (\nabla f(x + th)|h) = \sum_{k=1}^m h_k \partial_k f(x + th)$$

besitzt. Die Kettenregel liefert weiter $\varphi \in C^2((-a, a), \mathbb{R})$ und

$$\varphi''(t) = \sum_{j=1}^m h_j ((\partial_j \nabla f)(x + th)|h) = \sum_{j,k=1}^m h_j h_k \partial_{jk} f(x + th).$$

Induktiv sehen wir dann, dass φ in $C^{n+1}((-a, a), \mathbb{R})$ ist und die Gleichungen

$$\varphi^{(\nu)}(t) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_\nu=1}^m h_{\alpha_1} \dots h_{\alpha_\nu} (\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_\nu} f)(x + th)$$

für $t \in (-a, a)$ und $\nu \in \{1, \dots, n+1\}$ gelten. Wie wenden nun Taylors Theorem 5.36 aus Analysis 1 auf φ im Entwicklungspunkt $t_0 = 0$ an und erhalten eine Zahl $\tau \in (0, 1)$ mit

$$f(x+h) = \varphi(1) = \sum_{\nu=0}^n \frac{\varphi^{(\nu)}(0)}{\nu!} (1-0)^\nu + \frac{\varphi^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} (1-0)^{n+1}.$$

Durch Einsetzen ergibt sich (3.7). Der Zusatz zu R_n folgt aus der Beschränktheit der relevanten Ableitungen von f auf $\bar{B}(x, r)$ gemäß Theorem 2.50. $\square$

Wir definieren nun lokale Extrema wie in Analysis 1.

DEFINITION 3.28. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Die Funktion f hat an der Stelle x_0 ein lokales Minimum (lokales Maximum), wenn es so einen Radius $r > 0$ gibt, dass $B(x_0, r) \subseteq D$ und $f(x) \underset{(\leq)}{\geq} f(x_0)$ für alle $x \in B(x_0, r)$ gelten. Das lokale Minimum (Maximum) heißt strikt, wenn $f(x) \underset{(<)}{>} f(x_0)$ für alle $x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$ gilt, und global, wenn $f(x) \underset{(\leq)}{\geq} f(x_0)$ für alle $x \in D$ erfüllt ist. Wenn f differenzierbar und $\nabla f(x_0) = 0$ ist, dann nennt man x_0 kritischen Punkt. Ein Extremum ist ein Minimum oder ein Maximum.

Mittels der ersten Ableitung formulieren wir wie in Analysis 1 eine notwendige Bedingung für Extrema.

SATZ 3.29. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ habe in $x_0 \in D$ ein lokales Extremum. Dann ist x_0 ein kritischer Punkt.

BEWEIS. Wir betrachten die Funktion $\varphi_k : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$; $\varphi_k(t) = f(x_0 + te_k)$, für ein $k \in \{1, \dots, m\}$ und den Radius $r > 0$ aus Definition 3.28. Nach Voraussetzung hat φ_k bei $t = 0$ ein lokales Extremum, sodass $0 = \varphi'_k(0) = \partial_k f(x_0)$ nach Satz 5.18 aus Analysis 1 gilt. $\square$

Das nächste Beispiel zeigt, dass die obige Bedingung im Allgemeinen nicht hinreichend für Extrema ist. Das nachfolgende illustriert, wie man mit Satz 3.29 die Eindeutigkeit eines Extremums und (kombiniert mit dem Satz vom Maximum) auch seine Existenz nachweisen kann. Hier sieht man ferner die Rolle des Verhaltens von f bei ‘unendlich’ oder am Rand von D .

BEISPIEL 3.30. a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x, y) = x^2 - y^2$. Dann ist $\nabla f(0, 0) = (0 \ 0)^\top$, aber $(0, 0)$ ist kein lokaler Extrempunkt, da die Ungleichungen $f(x, 0) > f(0, 0) = 0 > f(0, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gelten. (Vergleiche Bemerkung 3.20.)

b) Sei $f : D := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x, y) = xe^{-(x^2+y^2)}$. Dann hat f bei $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ein globales Maximum und besitzt keine weiteren Extremstellen.

BEWEIS. Sei $(x, y) \in D$. Es gelten $f(x, y) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$ und

$$0 \leq f(x, y) \leq e^x e^{-r^2} \leq e^{r-r^2} \longrightarrow 0 \quad \text{für } r = |(x, y)|_2 \rightarrow \infty.$$

Wie in Korollar 2.51 sieht man nun, dass f ein positives globales Maximum bei einer Stelle $(x_0, y_0) \in D$ besitzt. Wir berechnen

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{-(x^2+y^2)} - 2x^2 e^{-(x^2+y^2)} \\ -2xy e^{-(x^2+y^2)} \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 3.29 muss nun $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ und somit $1 - 2x_0^2 = 0$ und $-2x_0 y_0 = 0$ gelten. Ferner muss jede Extremstelle diese Gleichungen erfüllen. In D haben diese genau die Lösung $(x_0, y_0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Also ist $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ eine globale Maximalstelle und es kann keine weiteren Extremstellen geben. $\square$

Die folgenden Eigenschaften symmetrischer Matrizen werden für die hinreichenden Bedingungen von Extrema benötigt.

DEFINITION 3.31. Sei $A \in L(\mathbb{R}^m)$ symmetrisch. Dann heißt A

- a) positiv (negativ) semidefinit, wenn $(Av|v) \underset{(\leq)}{\geq} 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^m$ gilt;
- b) positiv (negativ) definit, wenn $(Av|v) \underset{(<)}{>} 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ gilt;
- c) indefinit, wenn A weder positiv semidefinit noch negativ semidefinit ist.

Eine symmetrische Matrix ist also genau dann indefinit, wenn es Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^m$ mit $(Ax|x) > 0 > (Ay|y)$ gibt. Wir wiederholen einige Charakterisierungen dieser Begriffe aus der linearen Algebra.

BEMERKUNG 3.32. Sei $A = [a_{jk}] \in L(\mathbb{R}^m)$ symmetrisch. Dann gelten die folgenden Aussagen.

- a) Die Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn $\det A_l > 0$ für jedes $l \in \{1, \dots, m\}$ erfüllt ist, wobei man

$$A_l := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ll} \end{pmatrix}$$

setzt. Siehe z.B. Theorem 5.7.7 in [3].

- b) Die Matrix A ist genau dann negativ definit, wenn $-A$ positiv definit ist. Nach Teil a) und den Rechenregeln für Determinanten ist dies dazu äquivalent, dass $(-1)^l \det A_l > 0$ für jedes $l \in \{1, \dots, m\}$ gilt.

- c) Die Matrix A ist genau dann positiv (semi-)definit, wenn alle ihre Eigenwerte positiv (nichtnegativ) sind. Weiter ist A ist genau dann negativ (semi-)definit, wenn alle Eigenwerte negativ (nichtpositiv) sind. (Vergleiche z.B. Korollar 1 in Abschnitt 5.7.3 in [3] und seinen Beweis.)

- d) Sei A positiv definit. Dann gibt es so eine Zahl $\alpha > 0$, dass A der unteren Schranke $(Av|v) \geq \alpha |v|_2^2$ für alle $v \in \mathbb{R}^m$ genügt.

BEWEIS. Die Einheitssphäre $S(0, 1)$ ist abgeschlossen und beschränkt, also nach Theorem 2.44 von Bolzano-Weierstraß kompakt. Da die Funktion $v \mapsto (Av|v)$ stetig ist, liefert der Satz vom Maximum Theorem 2.50 ein $y_0 \in S(0, 1)$ mit

$$\min_{|y|_2=1} (Ay|y) = (Ay_0|y_0) =: \alpha > 0,$$

wobei wir bei der Ungleichung die positive Definitheit verwenden. Sei nun $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Dann liegt $y := |v|_2^{-1}v$ in $S(0, 1)$, und wir erhalten wie gewünscht

$$(Av|v) = |v|_2^2 (Ay|y) \geq \alpha |v|_2^2. \quad \square$$

Wir zeigen nun hinreichende Bedingungen für strikte lokale Extrema, die die aus Analysis 1 verallgemeinern. (Eine reelle Zahl A ist genau dann positiv, wenn sie

als 1×1 Matrix positiv definit ist.) Der zweite Teil von Behauptung a) tritt im Eindimensionalen nicht auf, da eine reelle Zahl nicht indefinit sein kann.

THEOREM 3.33. *Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ und $x \in D$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) *Wenn f bei x ein lokales Minimum (Maximum) hat, dann ist $\nabla^2 f(x)$ positiv (negativ) semidefinit. Somit hat f bei x kein lokales Extremum, wenn $\nabla^2 f(x)$ indefinit ist.*

b) *Wenn $\nabla f(x) = 0$ und $\nabla^2 f(x)$ positiv (negativ) definit sind, dann hat f bei x ein striktes lokales Minimum (Maximum).*

BEWEIS. Wir untersuchen nur Minima. Maxima werden dann behandelt, indem man $-f$ betrachtet. Sei $r > 0$ mit $B(x, r) \subseteq D$. Wir wählen $|h|_2 < r$ und $\varepsilon > 0$. Taylors Theorem 3.27 mit $n = 1$ liefert dann eine Zwischenstelle $\tau \in (0, 1)$ mit

$$f(x+h) = f(x) + (\nabla f(x)|h) + \frac{1}{2}(\nabla^2 f(x)h|h) + \frac{1}{2}[(\nabla^2 f(x+\tau h)h|h) - (\nabla^2 f(x)h|h)] \quad (3.9)$$

Wir haben $\frac{1}{2}[\dots] = R_{2,x}(x+h) =: R(h)$. Da $\nabla^2 f$ stetig ist, existiert so ein Radius $\delta_\varepsilon \in (0, r)$, dass für alle $h \in \overline{B}(0, \delta_\varepsilon)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |R(h)| &\leq \frac{1}{2} |\nabla^2 f(x+\tau h)h - \nabla^2 f(x)h|_2 |h|_2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|\nabla^2 f(x+\tau h) - \nabla^2 f(x)\| |h|_2^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} |h|_2^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

gilt, wobei wir die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und Satz 2.37 verwenden.

a) Die Funktion f habe bei x ein lokales Minimum. Wir wählen oben $r > 0$ so klein, dass $f(x+h) \geq f(x)$ für alle $h \in B(0, r)$ gilt. Nach Satz 3.29 ist somit $\nabla f(x) = 0$. Sei $h \in \overline{B}(0, \delta_\varepsilon)$. Dann liefert (3.9) die Formel

$$0 \leq f(x+h) - f(x) = 0 + \frac{1}{2}(\nabla^2 f(x)h|h) + R(h).$$

Mit (3.10) folgern wir daraus die Ungleichung

$$(\nabla^2 f(x)h|h) \geq -2R(h) \geq -2|R(h)| \geq -\varepsilon |h|_2^2.$$

Sei nun $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ und setze $h = \delta_\varepsilon |v|_2^{-1} v$. Es ergeben sich $|h|_2 = \delta_\varepsilon$ und

$$(\nabla^2 f(x)v|v) = \delta_\varepsilon^{-2} |v|_2^2 (\nabla^2 f(x)h|h) \geq -\varepsilon |v|_2^2.$$

Hier können wir $\varepsilon > 0$ beliebig klein wählen und erhalten Behauptung a).

b) Es seien $\nabla f(x) = 0$ und $A := \nabla^2 f(x)$ positiv definit. Gemäß Bemerkung 3.32 d) gibt es dann eine Zahl $\alpha > 0$ mit $(Ah|h) \geq \alpha |h|_2^2$ für alle $h \in \mathbb{R}^m$. Wir wählen nun $\varepsilon = \alpha/2$. Seien $\delta_\varepsilon > 0$ wie in (3.10) und $0 < |h|_2 \leq \delta_\varepsilon$. Dann implizieren (3.9) und (3.10) die Ungleichung

$$f(x+h) \geq f(x) + 0 + \frac{\alpha}{2} |h|_2^2 - |R(h)| \geq f(x) + \frac{\alpha}{2} |h|_2^2 - \frac{\alpha}{4} |h|_2^2 > f(x). \quad \square$$

BEMERKUNG 3.34. In (3.9) und (3.10) haben wir $|R_{2,x}(x+h)| = o(|h|_2^2)$, $h \rightarrow 0$, für das zweite Taylorrestglied von $f \in C^2(D, \mathbb{R})$. Analog zeigt man $|R_{n,x}(x+h)| = o(|h|_2^n)$, $h \rightarrow 0$, für $f \in C^n(D, \mathbb{R})$, siehe Theorem VII.5.11 von [2]. $\diamond$

Das folgende (einfache) Beispiel zeigt eine typische Anwendung von Theorem 3.33.

BEISPIEL 3.35. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy + 1$. Dann hat f genau die kritischen Punkte $(0, 0)$ und $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Dabei ist $(0, 0)$ kein lokaler Extrempunkt und f hat bei $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ein striktes lokales, aber nicht globales Minimum.

BEWEIS. Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wir berechnen zuerst den Gradienten

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 3y^2 - 2x \end{pmatrix}.$$

Dieser verschwindet genau für die Punkte $v_0 = (x_0, y_0) = (0, 0)$ und $v_1 = (x_1, y_1) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Die Hessematrix von f ist

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix}.$$

Bei v_0 und v_1 erhalten wir

$$A := \nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad B := \nabla^2 f(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es gelten $(Ae_1|e_1) = 2$ und $(A(1 \ 1)^\top|(1 \ 1)^\top) = -1$, sodass A indefinit ist. Bemerkung 3.32 a) impliziert die positive Definitheit von B . Theorem 3.33 liefert dann die Behauptungen bis auf die letzte. Das Minimum bei v_1 ist nicht global, da etwa $f(0, y) \rightarrow -\infty$ für $y \rightarrow -\infty$ gilt. $\square$

3.3. Der Umkehrsatz

Wir erinnern an Satz 5.10 in Analysis 1. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ strikt monoton und differenzierbar, sowie $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar mit der Ableitung

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Wir übertragen dieses Resultat nun auf den m -dimensionalen Fall. Das Hauptproblem ist dabei die Konstruktion einer (stetigen) Umkehrabbildung von $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, da im $\mathbb{R}^m$ keine Monotonie zur Verfügung steht. Für die Differenzierbarkeit müssen wir ferner die Offenheit des Bildes $f(D)$ zeigen. Die Ableitung selbst läßt sich dann (wie bei der Kettenregel Satz 3.11) relativ direkt berechnen, wobei man ihre Formel ausgehend vom eindimensionalen Fall leicht raten kann.

In der Tat wird im folgenden *Umkehrsatz* nur eine ‘lokale’ Inverse konstruiert, was (auf typische Weise) mittels des Banachschen Fixpunktsatzes Theorem 2.40 geschieht. Wir skizzieren zunächst die grundlegende Idee.

Seien $f(x_0) = y_0$ und $A := f'(x_0) \in L(\mathbb{R}^m)$ invertierbar (oder gleichwertig $\det A \neq 0$). Sei $y \approx y_0$ gegeben. Für f^{-1} suchen wir ein eindeutig bestimmtes Urbild $x \approx x_0$ mit $f(x) = y$. Einen ersten Fixpunktansatz bildet die Äquivalenz

$$f(x) = y \iff x = x - f(x) + y =: \tilde{g}_y(x).$$

Wir benötigen die strikte Kontraktivität von $\tilde{g}_y$, die wir mit Satz 3.23 nachweisen wollen. Allerdings kann schon die Norm $\tilde{g}'_y(x_0) = I - A$ groß sein. Um hier eine 0 zu erzielen, modifizieren wir den Ansatz zu

$$f(x) = y \iff A^{-1}f(x) = A^{-1}y \iff x = x - A^{-1}f(x) + A^{-1}y =: g_y(x).$$

Hier gilt nun $g'_y(x_0) = I - A^{-1}A = 0$, und für $x \approx x_0$ erhalten wir eine kleine Ableitung. Dies ist der Ausgangspunkt für den folgenden Beweis.

THEOREM 3.36. *Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in D$ und $y_0 = f(x_0)$. Weiter sei $f'(x_0) \in L(\mathbb{R}^m)$ invertierbar. Dann existieren offene Teilmengen $U \subseteq D$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ derart, dass $x_0 \in U$, $y_0 \in V$, die Einschränkung $f_U : U \rightarrow V$ bijektiv (sodass V in $f(D)$ liegt) und $f'(x)$ für jedes $x \in U$ invertierbar ist. Weiter ist die Umkehrabbildung $(f_U)^{-1} : V \rightarrow U$ stetig differenzierbar mit der Ableitung*

$$\left(f_U^{-1}\right)'(y) = f'(f_U^{-1}(y))^{-1} = f'(x)^{-1} \quad \text{für alle } y = f(x) \in V.$$

BEWEIS. 1) Wir konstruieren zuerst f_U^{-1} und beginnen mit Vorbereitungen.

a) Die Matrix $A := f'(x_0) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ist nach Voraussetzung invertierbar. Nach Satz 2.39 über die Neumannreihe gilt dies auch bei $x \in D$, wenn

$$\|f'(x_0) - f'(x)\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

gilt. Wegen der Stetigkeit von f' gibt es folglich so einen Radius $r_0 > 0$, dass $D_0 := B(x_0, r_0)$ in D liegt und $f'(x)^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ für alle $x \in D_0$ existiert.

Sei $y \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Wie oben erläutert, setzen wir

$$g_y : D_0 \rightarrow \mathbb{R}^m; \quad g_y(x) = x - A^{-1}f(x) + A^{-1}y,$$

und somit ist $f(x) = y$ äquivalent zur Fixpunktgleichung $g_y(x) = x$.

b) Da $y_0 = f(x_0)$ ist, gelten $g_y(x_0) = x_0 + A^{-1}(y - y_0)$ und damit $g_{y_0}(x_0) = x_0$. Wegen der Produktregel Satz 3.12 und weil $x \mapsto A^{-1}$ die Ableitung 0 hat, gehört g_y zu $C^1(D_0, \mathbb{R}^m)$ mit $g'_y(x_0) = I - A^{-1}f'(x_0) = 0$. Da g'_y stetig ist, existiert demnach so ein Radius $r \in (0, r_0)$, dass $\|g'_y(x)\| \leq 1/2$ für alle $x \in B(x_0, r)$ gilt. Satz 3.23 liefert dann die Ungleichung

$$|g_y(x) - g_y(z)|_2 \leq \frac{1}{2} |x - z|_2 \quad (3.11)$$

für alle $x, z \in B(x_0, r)$ und per Approximation auch für $x, z \in B := \overline{B}(x_0, r) \subseteq D_0$.

Als abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ ist B ein vollständiger metrischer Raum, siehe Satz 2.27. Nach (3.11) ist g_y strikt kontraktiv auf B , aber im Allgemeinen wird g_y die Menge B nicht in sich selbst abbilden. Sei $x \in B$. Um $|g_y(x) - x_0|_2 \leq r$ zu erzielen, verwenden wir

$$g_y(x) - x_0 = g_y(x) - g_y(x_0) + g_y(x_0) - x_0 = g_y(x) - g_y(x_0) + A^{-1}(y - y_0).$$

(So umgeht man die Differenz $x - x_0$ in $g_y(x) - x_0$, die schon Norm r hat.) Setze $\delta = r/(2\|A^{-1}\|)$ und $V = B(y_0, \delta)$. Für $y \in V$ folgt dann aus (3.11) die Ungleichung

$$|g_y(x) - x_0|_2 \leq \frac{1}{2} |x - x_0|_2 + \|A^{-1}\| |y - y_0|_2 \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

sodass $g_y : B \rightarrow B$ eine strikte Kontraktion ist. Theorem 2.40 liefert für jedes $y \in V$ einen einzigen Vektor $x \in B$ mit $g_y(x) = x$, also mit $f(x) = y$ nach Teil a). Wir sehen in Schritt 2), dass x sogar in $B^\circ = B(x_0, r)$ liegt.

Also liegt die Urbildmenge $U := (f|_{B^\circ})^{-1}(V)$ in $B \subseteq D_0$, sodass $f'(x)$ gemäß Schritt a) für alle $x \in U$ invertierbar ist. Laut Satz 2.32 und Bemerkung 2.25 ist auch U (in $\mathbb{R}^m$) offen; und nach dem eben Gezeigten ist die Einschränkung $f_U : U \rightarrow V$ von f bijektiv. Wegen $y_0 \in V$, ist $x_0 = f^{-1}(y_0)$ in U enthalten.

2) In diesem Schritt beweisen wir, dass $f_U^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz stetig ist, was wie beim Beweis der Kettenregel für die Berechnung der Ableitung benötigt wird. Seien $y, \hat{y} \in V$. Nach Teil 1) gibt es Fixpunkte $x = g_y(x)$ und $\hat{x} = g_{\hat{y}}(\hat{x})$ in B , die $f(x) = y$ und $f(\hat{x}) = \hat{y}$ lösen. Ähnlich wie in Schritt 1b) fügen wir $\pm g_y(\hat{x})$ ein und verwenden (3.11). Wir berechnen

$$\begin{aligned} |f_U^{-1}(y) - f_U^{-1}(\hat{y})|_2 &= |x - \hat{x}|_2 = |g_y(x) - g_{\hat{y}}(\hat{x})|_2 \\ &\leq |g_y(x) - g_y(\hat{x})|_2 + |g_y(\hat{x}) - g_{\hat{y}}(\hat{x})|_2 \\ &\leq \frac{1}{2} |x - \hat{x}|_2 + \|A^{-1}\| |y - \hat{y}|_2 \\ &\leq \frac{1}{2} |f_U^{-1}(y) - f_U^{-1}(\hat{y})|_2 + \|A^{-1}\| |y - \hat{y}|_2, \\ \frac{1}{2} |f_U^{-1}(y) - f_U^{-1}(\hat{y})|_2 &\leq \|A^{-1}\| |y - \hat{y}|_2, \\ |f_U^{-1}(y) - f_U^{-1}(\hat{y})|_2 &\leq 2\|A^{-1}\| |y - \hat{y}|_2, \end{aligned}$$

wobei auch Satz 2.37 zur Operatornorm eingeht. Für $\hat{x} = x_0$ und $\hat{y} = y_0$ folgt damit $|x - x_0|_2 < 2\|A^{-1}\| \delta = r$ und damit $x \in B^\circ$.

3) Wir müssen noch f_U^{-1} ableiten. Seien dazu $y \in V$, $\rho > 0$ mit $B(y, \rho) \subseteq V$ und $h \in B(0, \rho) \setminus \{0\}$. Es gilt also $y + h \in V$. Wir setzen $x = f_U^{-1}(y) \in U$ und $x + \xi = f_U^{-1}(y + h)$, woraus $f(x + \xi) = y + h = f(x) + h$ folgt. Schritt 2) liefert dann die Abschätzung

$$|\xi|_2 = |f_U^{-1}(y + h) - x|_2 = |f_U^{-1}(y + h) - f_U^{-1}(y)|_2 \leq 2\|A^{-1}\| |h|_2.$$

Die obigen Definitionen, diese Ungleichung und Satz 2.37 implizieren nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{|h|_2} |f_U^{-1}(y + h) - f_U^{-1}(y) - f'(x)^{-1}h|_2 &= \frac{1}{|h|_2} |x + \xi - x - f'(x)^{-1}(f(x + \xi) - f(x))|_2 \\ &= \frac{1}{|h|_2} \left| -f'(x)^{-1} [f(x + \xi) - f(x) - f'(x)\xi] \right|_2 \\ &\leq \frac{2\|A^{-1}\| \|f'(x)^{-1}\|}{|\xi|_2} |f(x + \xi) - f(x) - f'(x)\xi|_2. \end{aligned}$$

Da f differenzierbar ist, konvergiert die rechte Seite für $h \rightarrow 0$ (und damit $\xi \rightarrow 0$) gegen 0. Also hat f_U^{-1} bei y die Ableitung $f'(x)^{-1} = J(f'(f_U^{-1}(y)))$, wobei J die Abbildung $M \mapsto M^{-1}$ auf den invertierbaren $m \times m$ -Matrizen ist. Diese ist nach einer Übung differenzierbar und damit stetig. Also ist $f_U^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ als Komposition stetiger Funktion auch stetig, siehe Satz 2.30. $\square$

Im obigen Satz schließt man aus einer Eigenschaft der Ableitung einer C^1 -Funktion f an einer Stelle x_0 auf Aussagen über f in einer (evt. kleinen) offenen Umgebung von x_0 . Dies ist typisch für die ‘lokale Theorie’ in der Analysis, vergleiche auch Theorem 5.28. Außerdem treten einige der obigen Beweisideen an vielen Stellen in der Analysis wieder auf.

In der nächsten Folgerung zeigen wir eine ‘globale’ Variante des Umkehrsatzes. Dazu benötigen wir einen neuen Begriff. Seien $D, \tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Eine Funktion $f : D \rightarrow \tilde{D}$ heißt *Diffeomorphismus*, wenn sie bijektiv ist, sowie f und f^{-1} stetig differenzierbar sind.

KOROLLAR 3.37. *Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ injektiv und $\tilde{D} = f(D)$. Genau dann ist $\tilde{D}$ offen und $f : D \rightarrow \tilde{D}$ diffeomorph, wenn $f'(x)$ für jedes $x \in D$ invertierbar ist. Weiter gilt dann $f'(x)^{-1} = (f^{-1})'(f(x))$ für $x \in D$.*

BEWEIS. Sei $f'(x)$ für jedes $x \in D$ invertierbar. Wähle $y_0 \in \tilde{D}$. Dann gibt es einen Vektor $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = y_0$. Theorem 3.36 liefert solche offene Teilmengen $U \subseteq D$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$, dass die Einschränkung $f_U : U \rightarrow V$ bijektiv mit einer stetig differenzierbaren Umkehrabbildung f_U^{-1} ist und $y_0 = f(x_0)$ in $V \subseteq f(D) = \tilde{D}$ liegt. Also ist $\tilde{D}$ offen. Da $f : D \rightarrow \tilde{D}$ nach Voraussetzung die Umkehrabbildung f^{-1} besitzt, gilt $f_U^{-1}(y) = x = f^{-1}(y)$ für $x \in U$ und $y = f(x) \in V$. Somit ist $f^{-1} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar.

Seien umgekehrt $\tilde{D}$ offen und $f : D \rightarrow \tilde{D}$ ein Diffeomorphismus. Mittels der Kettenregel folgt dann aus $x = f^{-1}(f(x))$ wie gefordert die Gleichung $I = (f^{-1})'(f(x))f'(x)$. $\square$

Wir diskutieren diese wichtige Aussage ein wenig. Das Beispiel $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = x^3$, mit der stetigen Umkehrabbildung

$$g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad g^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y}, & y \geq 0, \\ -\sqrt[3]{|y|}, & y < 0, \end{cases}$$

belegt, dass eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion kein Diffeomorphismus sein muss. Hier gilt $g'(0) = 0$ und $(g^{-1})'(y)$ explodiert für $y \rightarrow 0$. Andererseits folgt aus der Invertierbarkeit von $f'(x)$ bei jedem $x \in D$ nicht die Injektivität von $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, wie das anschließende Beispiel zeigt. Man braucht also die globale Eigenschaft der Injektivität auf D , um einen Diffeomorphismus zu erhalten.

Als eine typische Anwendung der obigen Aussagen behandeln wir wieder die Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$.

BEISPIEL 3.38. Es sei

$$\Phi : D := (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Nach Beispiel 3.16 ist Φ stetig differenzierbar mit invertierbarer Ableitung

$$\Phi'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

für jedes $(r, \varphi) \in D$. Es gilt ferner $\Phi(D) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} =: \widetilde{D}$. Gleichwohl ist die Abbildung Φ nicht injektiv, da z.B. $\Phi(r, 0) = \Phi(r, 2\pi)$ ist. Allerdings ist die Einschränkung

$$\Phi_0 : D_0 := \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}) =: \widetilde{D}_0$$

gemäß Beispiel 3.16 bijektiv. Korollar 3.37 zeigt nun, dass Φ_0 ein Diffeomorphismus ist. Weiter erhalten wir die Ableitung

$$(\Phi_0^{-1})'(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{1}{r} \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix}$$

für $(x, y) \in \widetilde{D}_0$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$. $\diamond$

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^{n+l}, \mathbb{R}^l)$ mit $f(x_0, y_0) = 0$. Wir wollen die Gleichung $f(x, y) = 0$ bei (x_0, y_0) ‘lokal nach $y \in \mathbb{R}^l$ auflösen’, d.h.: Wir suchen eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^l$ derart, dass $f(x, \varphi(x)) = 0$ für alle $x \in U$ gilt. Darüber hinaus sollen dies alle Lösungen für $x \in U$ sein. Dies erläutern wir zuerst an einem geometrischen Beispiel, in dem man dieses Problem explizit lösen kann.

BEISPIEL 3.39. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Wir schreiben die Einheitskreislinie $K = S(0, 1)$ implizit als Nullstellenmenge $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$. Es seien $\varphi_{\pm}(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$ für $x \in [-1, 1]$. Genau dann liegt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in K , wenn $x \in [-1, 1]$ und $y^2 = 1 - x^2$ gelten. Diese Äquivalenz führt auf die Gleichung

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1], y = \varphi_+(x) \text{ oder } y = \varphi_-(x)\}.$$

Somit gibt es für jedes $(x_0, y_0) \in K \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$ offene Intervalle $U_x, U_y \subseteq \mathbb{R}$ derart, dass $K \cap (U_x \times U_y)$ gerade mit den Graphen von φ_+ bzw. φ_- über U_x übereinstimmt. Also sind für $(x, y) \in U_x \times U_y$ alle Lösungen von $f(x, y) = 0$ durch die Beziehungen $x \in U_x$ und $y = \varphi_+(x)$, bzw. $y = \varphi_-(x)$, gegeben.

Bei den Punkten $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ gelingt keine eindeutige Auflösung. Hier ist $\partial_y f(\pm 1, 0) = 0$ und K hat eine senkrechte Tangente. $\diamond$

Für die höherdimensionale Situation führen wir einige Bezeichnungen ein. Seien $l, m \in \mathbb{N}$ mit $m > l$. Wir setzen $n = m - l \in \mathbb{N}$, identifizieren $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+l} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ und schreiben $v \in \mathbb{R}^m$ als

$$v = (x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_l) \in \mathbb{R}^{n+l}.$$

Mit $B_d(v, r)$ bezeichnen wir vorübergehend die Kugeln im $\mathbb{R}^d$. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $(x, y) \in D$ und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^l)$. Wir schreiben

$$\begin{aligned}\partial_x f &= \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_l & \cdots & \partial_n f_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \\ \partial_y f &= \begin{pmatrix} \partial_{n+1} f_1 & \cdots & \partial_{n+l} f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n+1} f_l & \cdots & \partial_{n+l} f_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial y_l} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Hierbei ist $\partial_x f(x, y)$ eine $l \times n$ -Matrix und $\partial_y f(x, y)$ eine $l \times l$ -Matrix.

Der folgende *Hauptsatz über implizit definierte Funktionen* löst das oben angesprochene Problem ganz im Sinne des Kreisbeispiels. Wir wenden ihn unten auf verwandte, aber weitaus allgemeinere geometrische Fragestellungen an. Dieser Satz ist ein ungemein flexibles Instrument in der lokalen Theorie der Analysis und bildet gewissermaßen ihre Grundlage. Im Beweis führen wir das Theorem mit einem ‘Trick’ auf den Umkehrsatz zurück.

THEOREM 3.40. *Seien $D \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^l)$, $(x_0, y_0) \in D$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $\partial_y f(x_0, y_0) \in L(\mathbb{R}^l)$ sei invertierbar. Dann existieren solche offene Mengen $U_x \subseteq \mathbb{R}^n$ und $U_y \subseteq \mathbb{R}^l$, sowie eine Abbildung $\varphi \in C^1(U_x, \mathbb{R}^l)$, dass die folgenden Aussagen gelten.*

- a) (x_0, y_0) liegt in $U_x \times U_y \subseteq D$, $\varphi(U_x) \subseteq U_y$, $\varphi(x_0) = y_0$ und $\partial_y f(x, y) \in L(\mathbb{R}^l)$ ist für alle $(x, y) \in U_x \times U_y$ invertierbar.
- b) Genau dann liegt (x, y) in $U_x \times U_y$ und löst $f(x, y) = 0$, wenn x in U_x enthalten ist und $y = \varphi(x)$ gilt. Insbesondere haben wir $f(x, \varphi(x)) = 0$ für alle $x \in U_x$.
- c) Für alle $x \in U_x$ haben wir Ableitung

$$\varphi'(x) = -[\partial_y f(x, \varphi(x))]^{-1} (\partial_x f)(x, \varphi(x)) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l). \quad (3.12)$$

Um das Theorem anzuwenden, muss man u.U. manche Variablen permutieren. Wenn $n = l$ gilt, kann man im obigen Hauptsatz die Rollen von x und y vertauschen und (falls $\partial_x f(x_0, y_0)$ invertierbar ist) bei (x_0, y_0) lokal nach x auflösen. Das Theorem bleibt auch gültig für offene Teilmengen von U_x , die x_0 enthalten.

BEWEIS VON THEOREM 3.40. Wir definieren die Abbildung

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}; \quad F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Diese ‘Erweiterung’ ist stetig differenzierbar und besitzt die $(n + l) \times (n + l)$ Jacobimatrix

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times l} \\ \partial_x f(x, y) & \partial_y f(x, y) \end{pmatrix}$$

für $(x, y) \in D$. Man sieht leicht, dass diese Blockmatrix bei (x_0, y_0) die Inverse

$$F'(x_0, y_0)^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times l} \\ -\partial_y f(x_0, y_0)^{-1} \partial_x f(x_0, y_0) & \partial_y f(x_0, y_0)^{-1} \end{pmatrix}$$

besitzt. Der Umkehrsatz 3.36 liefert nun solche offene Teilmengen $U \subseteq D$ und $V \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$, dass (x_0, y_0) in U liegt und $F : U \rightarrow V$ bijektiv mit der stetig differenzierbaren Umkehrabbildung $F_U^{-1} : V \rightarrow U$ ist. Es gilt auch $(x_0, 0) = F(x_0, y_0) \in V$.

Sei $(x, y) \in U$. Wir schreiben $F(x, y) = (x \ f(x, y))^T = (w \ z)^T \in V \subseteq \mathbb{R}^{n+l}$. Da $x = w$ ist, hat F_U^{-1} die Gestalt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F_U^{-1}(w, z) = \begin{pmatrix} w \\ g(w, z) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad g = \begin{pmatrix} [F_U^{-1}]_{n+1} \\ \vdots \\ [F_U^{-1}]_{n+l} \end{pmatrix} \in C^1(V, \mathbb{R}^l).$$

Also gilt genau dann die Aussage $f(x, y) = 0$, wenn $z = 0$ erfüllt ist. Dies ist äquivalent zu der Gleichung $y = g(x, 0)$.

Wir wählen nun so einen Radius $r > 0$, dass $D_0 := B_n(x_0, r) \times B_l(y_0, r) \subseteq U$ und $B_n(x_0, r) \times B_l(0, r) \subseteq V$ gelten, sowie $\partial_y f(x, y)$ für alle $(x, y) \in D_0$ invertierbar ist. (Hier verwendet man etwa die Inklusion $D_0 \subseteq B_{n+l}((x_0, y_0), \sqrt{2}r)$ und geht wie in Schritt 1a) des Beweises von Theorem 3.36 vor.) Die Funktion

$$\varphi : B_n(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}^l; \quad \varphi(x) = g(x, 0),$$

ist stetig differenzierbar und erfüllt $\varphi(x_0) = y_0$, da $f(x_0, y_0) = 0$ gilt. Wir definieren weiter $U_y = B_l(y_0, r)$ und $U_x = B_n(x_0, r) \cap \varphi^{-1}(U_y)$. Die Menge U_x ist nach den Sätzen 2.32 und 2.20 offen. Weiter gelten $(x_0, y_0) \in U_x \times U_y \subseteq D_0$ und $\varphi(U_x) \subseteq U_y$. Wir haben somit die Behauptungen a) und b) gezeigt.

Insbesondere erhalten wir die Gleichung $0 = f(x, \varphi(x))$ für alle $x \in U_x$, woraus mit der Kettenregel Satz 3.11 die Identitäten

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x, \varphi(x)) \begin{pmatrix} I_{n \times n} \\ \varphi'(x) \end{pmatrix} = ((\partial_x f)(x, \varphi(x)) \quad \partial_y f(x, \varphi(x))) \begin{pmatrix} I_{n \times n} \\ \varphi'(x) \end{pmatrix} \\ &= (\partial_x f)(x, \varphi(x)) + \partial_y f(x, \varphi(x)) \varphi'(x) \end{aligned}$$

folgen. Diese implizieren Aussage c). □

Zur Illustration besprechen wir ein einfaches Beispiel.

BEISPIEL 3.41. Seien $z = (x, y_1, y_2) = (x, y) \in \mathbb{R}^3$ und

$$f(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x^3 + y_1^3 + y_2^3 - 7 \\ xy_1 + y_1 y_2 + xy_2 + 2 \end{pmatrix}.$$

Sei $z_0 = (2, -1, 0)$. Dann gilt $f(z_0) = 0$ und f liegt in $C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ mit der Ableitung

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 3y_1^2 & 3y_2^2 \\ y_1 + y_2 & x + y_2 & y_1 + x \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$\partial_y f(z_0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \partial_x f(z_0) = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix},$$

sodass $\partial_y f(z_0)$ invertierbar ist. Nach Theorem 3.40 gibt es also solche $r > 0$, $\varphi \in C((2-r, 2+r), \mathbb{R}^2)$ und ein offenes $U_y \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(-1, 0) \in U_y$, dass alle Lösungen von $f(x, y_1, y_2) = 0$ in $(2-r, 2+r) \times U_y$ durch

$$f(x, \varphi(x)) = \begin{pmatrix} x^3 + \varphi_1(x)^3 + \varphi_2(x)^3 - 7 \\ x\varphi_1(x) + \varphi_1(x)\varphi_2(x) + x\varphi_2(x) + 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{für } x \in (2-r, 2+r)$$

gegeben sind. Ferner gilt $\varphi'(2) = -\partial_y f(z_0)^{-1} \partial_x f(z_0) = (-4 \ 9)^T$.

Die Gleichung $f(x, y_1, y_2) = 0$ kann bei $(2, -1, 1)$ hingegen nicht nach y aufgelöst werden (obgleich $\partial_y f(2, -1, 1)$ invertierbar ist), da $f(2, -1, 1) \neq 0$ ist. $\diamond$

Ein bisschen Differentialgeometrie. Wir zeigen die Äquivalenz verschiedener Definitionen glatter (zweidimensionaler) Flächen im $\mathbb{R}^3$. Diese Beschreibungen erlauben es dann Tangential- und Normalenräume einzuführen. Andere Dimensionen behandelt man analog. Wir werden diese Aussagen in Analysis 3 im Kontext von Oberflächenintegralen benötigen.

DEFINITION 3.42. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt (eingebettete) C^1 -Fläche im $\mathbb{R}^3$, wenn für jedes $p \in M$ offene Teilmengen $V, U \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $p \in V$ und ein Diffeomorphismus $\psi: V \rightarrow U$ so existieren, dass $\psi(V \cap M) = U \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ gilt. Dann heißt ψ eine Karte von M .

Man kann also so eine Fläche mittels ψ lokal zu einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ ‘aufbiegen’. Man schließt mit dieser Definition etwa Ecken, Kanten, Selbstdurchdringungen oder -berührungen aus. Dazu ist es wichtig, dass ψ auf einer Umgebung von M und nicht nur auf M selbst agiert.

Wenn M abgeschlossen und beschränkt ist, kann man in dieser Definition endlich viele V und ψ so auswählen, dass die Vereinigung dieser V die Menge M enthält. Dies folgt direkt aus den Theoremen 2.44 und 2.46 von Bolzano–Weierstraß bzw. Heine–Borel. Entsprechende Aussagen gelten für die Aussagen b)–d) im nächsten Satz. Man sieht in den folgenden Beweisen und Beispielen, dass man meist mehrere Karten benötigt, um eine Fläche zu beschreiben und zu untersuchen.

Im nächsten Satz zeigen wir die angekündigten Äquivalenzen. Er ist eine herausragende Anwendung des Hauptsatzes über implizit definierte Funktionen Theorem 3.40 und des Umkehrsatzes Theorem 3.36.

SATZ 3.43. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

- a) M ist eine C^1 -Fläche. (also beschrieben durch (lokale) Karten)
- b) Für jedes $p \in M$ gibt es eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^3$ und eine Funktion $g \in C^1(D, \mathbb{R})$ derart, dass $p \in D$, $\nabla g(w) \neq 0$ für alle $w \in D$ und

$$M \cap D = \{w \in D \mid g(w) = 0\}$$

gelten. (lokale Nullstellenmenge)

- c) Für jedes $p \in M$ gibt es Indizes $i < j$ in $\{1, 2, 3\}$, offene Teilmengen $U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ und $U_1 \subseteq \mathbb{R}$, sowie eine Funktion $h \in C^1(U_2, \mathbb{R})$ derart, dass $(p_i, p_j) \in U_2$, $p_k \in U_1$ (wobei $\{k\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\}$), $h(U_2) \subseteq U_1$, und

$$M \cap Z = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid (x_i, x_j) \in U_2, x_k = h(x_i, x_j) \right\}.$$

mit $Z := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x_i, x_j) \in U_2, x_k \in U_1\}$ gelten. (lokaler Graph)

- d) Für jedes $p \in M$ gibt es offene Teilmengen $U_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ und $W \subseteq \mathbb{R}^3$, sowie eine Abbildung $F \in C^1(U_0, \mathbb{R}^3)$ derart, dass $p \in W$, $\text{Rang } F'(s, t) = 2$ für alle $(s, t) \in U_0$ und $F : U_0 \rightarrow M \cap W$ bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung sind. (lokale Parametrisierung)

BEWEIS. Wir zeigen den Satz durch einen Ringschluss. Dabei kann man in der ersten und dritten Implikation die benötigten Abbildungen (g bzw. F) explizit angeben; in der zweiten ergibt sich h unmittelbar aus Theorem 3.40. Der letzte Schluss ist aufwändiger.

‘a) $\Rightarrow$ b)’: Wir setzen $D = V$ und $g : D \rightarrow \mathbb{R}$; $g(w) = \psi_3(w)$. Dann gelten $M \cap D = \{w \in D \mid g(w) = \psi_3(w) = 0\}$ und $\nabla g(w) \neq 0$ für alle $w \in D$, da $\psi'(w)$ nach Aussage a) invertierbar ist.

‘b) $\Rightarrow$ c)’: Sei $g(p) = 0$. Nach Voraussetzung b) ist $\partial_k g(p) \neq 0$ für ein $k \in \{1, 2, 3\}$. Es sei etwa $k = 3$. Theorem 3.40 liefert dann offene Mengen $U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ und $U_1 \subseteq \mathbb{R}$ und eine Funktion $h \in C^1(U_2, \mathbb{R})$ mit $h(U_2) \subseteq U_1$ und $p \in U_2 \times U_1 \subseteq D$ derart, dass die Gleichungen $g(x, y, z) = 0$ für $(x, y, z) \in U_2 \times U_1$ und $z = h(x, y)$ für $(x, y) \in U_2$ äquivalent sind.

‘c) $\Rightarrow$ d)’: Sei etwa $k = 3$ in Aussage c). Wir setzen $U_0 = U_2$, $W = U_2 \times U_1$ und $F : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $F(s, t) = (s \ t \ h(s, t))^T$. Nach einer Übung ist W offen. Weiter ist die Funktion F stetig differenzierbar und ihre Ableitung

$$F'(s, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_1 h(s, t) & \partial_2 h(s, t) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

hat für alle $s, t \in U_0$ den Rang 2. Ferner ist $F : U_0 \rightarrow M \cap W$ injektiv, nach c) auch surjektiv und die Umkehrabbildung $F^{-1} : M \cap W \rightarrow U_0$; $F^{-1}(x, y, z) = (x \ y)^T$, ist offenbar stetig.

‘d) $\Rightarrow$ a)’: Es sei $F(s_0, t_0) = p$. Nach Voraussetzung ist eine quadratische Teilmatrix von $F'(s_0, t_0)$ invertierbar; diese sei etwa

$$A := \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(s_0, t_0) & \partial_2 F_1(s_0, t_0) \\ \partial_1 F_2(s_0, t_0) & \partial_2 F_2(s_0, t_0) \end{pmatrix}.$$

Wir definieren die Abbildung $\Phi : U_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$; $\Phi(s, t, \tau) = F(s, t) + \tau e_3$. Dann ist Φ stetig differenzierbar und die Ableitung

$$\Phi'(s_0, t_0, 0) = \begin{pmatrix} A & 0_{2 \times 1} \\ F'_3(s_0, t_0) & 1 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar. Der Umkehrsatz Theorem 3.36 liefert nun solche offene Teilmengen $\hat{U} \subseteq U_0 \times \mathbb{R}$ und $\hat{V} \subseteq \mathbb{R}^3$, dass $(s_0, t_0, 0)$ in $\hat{U}$ und $p = \Phi(s_0, t_0, 0)$ in $\hat{V}$ liegen, sowie $\Phi : \hat{U} \rightarrow \hat{V}$ ein Diffeomorphismus ist.

Nach Voraussetzung ist $M_0 = \{\Phi(s, t, 0) = F(s, t) \mid (s, t, 0) \in \hat{U}\}$ eine Teilmenge von $M \cap W$, die p enthält. Weiter ist sie das Urbild von $\{(s, t) \mid (s, t, 0) \in \hat{U}\}$ unter der stetigen Umkehrabbildung $F^{-1} : M \cap W \rightarrow \mathbb{R}^2$, vergleiche (2.11), sodass Satz 2.32 die Offenheit von M_0 im metrischen Raum $M \cap W$ mit $d(v, w) = |v - w|_2$ zeigt. Nach Bemerkung 2.25 gibt es dann eine offene Menge $W_0 \subseteq W \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $M_0 = M \cap W_0$. Wir definieren die offene Teilmenge $V = \hat{V} \cap W_0$ von $\mathbb{R}^3$ (siehe Satz 2.20), die Einschränkung $\psi = (\Phi^{-1})|_V : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $U = \psi(V) \subseteq \hat{U}$. Da Φ stetig ist, liefert wieder Satz 2.32 die Offenheit von U in $\mathbb{R}^2$. Außerdem ist mit Φ^{-1} auch $\psi : V \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus. Ferner erhalten wir $p \in V$ und

$$\begin{aligned} V \cap M &= \hat{V} \cap W_0 \cap M \cap W_0 = V \cap M_0 \\ &= \Phi(U) \cap \Phi(\{x \in \hat{U} \mid x_3 = 0\}) = \Phi(\{x \in U \mid x_3 = 0\}), \end{aligned}$$

da Φ injektiv ist. Daraus folgt $\psi(V \cap M) = \Phi^{-1}(V \cap M_0) = U \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$. $\square$

Wegen der Verwendung von Theorem 3.40 bzw. Theorem 3.36 können sich in der zweiten und vierten Implikation die verwendeten Ausschnitte von M verkleinern. Das zeigt, dass der ‘lokale Ansatz’ in Definition 3.42 angemessen ist. Man beachte auch, wie im letzten Beweisschritt die geforderte Stetigkeit von F^{-1} die Existenz des offenen Definitionsbereichs $V \subseteq \mathbb{R}^3$ für die Karte ψ liefert.

BEISPIEL 3.44. Im Falle der Sphäre $S = S(0, r) \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $r > 0$ sehen die Objekte in Satz 3.43 wie folgt aus.

b) Es gilt $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0\}$. Hier kann man z.B. $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ wählen, da dort $\nabla g(w) = 2w \neq 0$ gilt und S in D liegt.

c) Die offene obere Halbsphäre $S_+ = S \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ ist der Graph $\{(x, y, h(x, y)) \mid (x, y) \in B_{\mathbb{R}^2}(0, r)\}$ der C^1 -Funktion $h : U_2 := B_{\mathbb{R}^2}(0, r) \rightarrow \mathbb{R}$; $h(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, wobei z.B. $U_1 = (0, 2r)$ ist. Hier explodiert $|\nabla h(x, y)|_2$ für $|(x, y)|_2 \rightarrow r$. (Man braucht vier solcher Darstellungen, um S zu überdecken.)

d) Die geschlitzte Sphäre $S' = S \setminus H$ mit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, x \leq 0\}$ wird durch

$$F_r = F : U_0 := (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad F(\varphi, \theta) = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix},$$

parametrisiert. (Hier entspricht φ einem Längengrad und θ einem Breitengrad.) Die Funktion $F \in C^1(U_0, \mathbb{R}^3)$ die Ableitung

$$F'(\varphi, \theta) = r \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \cos(\theta) & -\cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\varphi) \cos(\theta) & -\sin(\varphi) \sin(\theta) \\ 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

die auf U_0 den Rang 2 besitzt, da $\cos \theta > 0$ ist.

Wir zeigen, dass $F : U_0 \rightarrow S'$ bijektiv ist. Sei dazu $(x, y, z) \in S'$. Da $\frac{z}{r}$ in $(-1, 1)$ liegt, gibt es genau einen Winkel $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit $z = r \sin \theta$. Es folgt

$$x^2 + y^2 = r^2 - z^2 = r^2 - r^2 \sin^2 \theta = r^2 \cos^2 \theta,$$

sodass (x, y) auf der Kreislinie mit Radius $r \cos \theta > 0$ liegt. Wegen $(x, y, 0) \notin H$, erhalten wir ähnlich wie in Beispiel 3.16 genau einen Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi)$ mit $(x, y) = r \cos \theta (\cos \varphi, \sin \varphi)$. Also ist $(x, y, z) = F_r(\varphi, \theta)$.

Um die noch fehlende Stetigkeit von F^{-1} einzusehen, betrachten wir ‘Kugelkoordinaten’ $\Phi : U := \mathbb{R}_+ \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $\Phi(r, \varphi, \theta) = F_r(\varphi, \theta)$. Das obige Argument zeigt die Injektivität von Φ und $\Phi(U) = \mathbb{R}^3 \setminus H$. In einer Übung wurde Φ' berechnet und es folgt nun leicht $\det \Phi'(r, \varphi, \theta) = r^2 \cos \theta > 0$ auf U . Korollar 3.37 zeigt dann, dass $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus H$ diffeomorph und damit $F^{-1} = \Phi|_{S'}^{-1}$ stetig ist. (Man braucht drei solcher Darstellungen, um S zu überdecken.) $\diamond$

Wir nutzen nun diese Resultate, um Tangential- und Normalenräume zu erklären.

BEMERKUNG 3.45. Sei M eine C^1 -Fläche und $p \in M$. Wir definieren

a) den *Tangentialraum* $T_p M$ an M bei $p = F(u_0)$ (gemäß Satz 3.43 d)) durch

$$T_p M = F'(u_0)(\mathbb{R}^2) = \left\{ F'(u_0) \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\};$$

b) den *Normalenraum* $N_p M$ an M bei p mit $g(p) = 0$ (gemäß Satz 3.43 b)) durch

$$N_p M = \{ \tau \nabla g(p) \mid \tau \in \mathbb{R} \}.$$

Nach Satz 3.43 gelten $\dim T_p M = 2$ und $\dim N_p M = 1$. Wir motivieren die beiden Definitionen.

zu a): Seien $\overline{B}(u_0, \delta) \subseteq U_0$ und $j \in \{1, 2\}$. Dann ist $\varphi : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^3$; $\varphi_j(s) = F(u_0 + s e_j) \in M$, eine C^1 -Kurve auf M mit dem Tangentenvektor $v_j := \varphi'_j(0) = F'(u_0) e_j = \partial_j F(u_0)$ bei p (laut der Kettenregel). Die Vektoren v_1 und v_2 spannen $T_p M$ auf.

zu b): Mit der Notation aus a) gilt $g(\varphi_j(s)) = 0$ für $|s| \leq \delta$. Daraus folgt mit der Kettenregel die Gleichung $0 = g'(\varphi_j(0)) \varphi'_j(0) = (\nabla g(p) | v_j)$ für $j \in \{1, 2\}$. Also steht $N_p M$ senkrecht auf $T_p M$.

Wenn M bei $p = (x_0, y_0, h(x_0, y_0))$ wie in Satz 3.43 c) durch einen Graphen gegeben ist, so gelten

$$\begin{aligned} T_p M &= \left\{ v = \begin{pmatrix} s & t & s \partial_1 h(x_0, y_0) + t \partial_2 h(x_0, y_0) \end{pmatrix}^\top \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}, \\ N_p M &= \left\{ v = \tau \begin{pmatrix} -\partial_1 h(x_0, y_0) & -\partial_2 h(x_0, y_0) & 1 \end{pmatrix}^\top \mid \tau \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Die Aussage zu $T_p M$ folgt dabei aus der Formel (3.13) für $F'(s, t)$ in diesem Fall. Für $N_p M$ kann man $g(x, y, z) = z - h(x, y)$ verwenden. Man beachte, dass $N_p M$ senkrecht auf $T_p M$ steht.

Im Falle der Sphäre erhalten wir gemäß Beispiel 3.44 die Formeln

$$T_p M = \left\{ s \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \sin(\theta) \\ -\sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

mit $p = F(\varphi, \theta)$ sowie $N_p M = \{\tau p \mid \tau \in \mathbb{R}\}$. $\diamond$

In vielen Anwendungsproblemen will man reellwertige Funktionen f unter Nebenbedingungen der Form $g(z) = 0$ minimieren. Wir illustrieren dies mit einer einfachen geometrischen Fragestellung.

BEISPIEL 3.46. Seien die Zahlen $a, b, c > 0$ fest gegeben. Wir suchen den Quader $Q = [-x, x] \times [-y, y] \times [-z, z]$ mit maximalen Volumen $f(x, y, z) = 8xyz$ für $(x, y, z) \in D := \mathbb{R}_+^3$, dessen Ecken auf dem Ellipsoid $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\}$ liegen, wobei

$$f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x, y, z) = 8xyz, \quad g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

sind. Die Menge $E = g^{-1}(\{0\})$ ist nach Satz 2.32 abgeschlossen und damit auch $E \cap \overline{D}$. Das Ellipsoid ist ferner beschränkt, da es in der Kugel $\overline{B}(0, \max\{a, b, c\})$ liegt. Also ist $E \cap \overline{D}$ nach Theorem 2.44 von Bolzano-Weierstraß kompakt und f nimmt auf $E \cap \overline{D}$ sein Maximum μ an, siehe Theorem 2.50. Man beachte, dass Q (und damit f) durch seine Ecke im ersten Oktanten $\overline{D}$ eindeutig bestimmt ist. Weiter ist das Volumen von Q für $(x, y, z) \in \partial \overline{D}$ gleich 0, während μ positiv ist. Wir können demnach f und g auf D einschränken.

Mit Hilfe des folgenden Satzes werden wir zeigen, dass das Maximum μ gleich $\frac{8}{3\sqrt{3}}abc$ ist und genau am Punkt $(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(a, b, c)$ angenommen wird. $\diamond$

Im folgenden *Satz von Lagrange* nehmen wir an, wir hätten eine Extremalstelle z_0 von f auf der Nullstellenmenge M von g (etwa mittels des Satzes von Maximum). Anders als in Satz 3.29 muss nun $\nabla f(z_0)$ nicht verschwinden, sondern stattdessen senkrecht auf (dem Tangentialraum von) M stehen. Dies ist die geometrische Bedeutung von (3.14), vergleiche Bemerkung 3.45. Der Beweis greift Ideen aus dem obigen Ausflug in die Differentialgeometrie auf.

THEOREM 3.47. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ und $g \in C^1(D, \mathbb{R}^l)$ mit $1 \leq l < m$. Setze $M = \{z \in D \mid g(z) = 0\}$. Die Funktion f besitze auf M ein Extremum bei $z_0 \in M$ und $g'(z_0) \in \mathbb{R}^{l \times m}$ habe den Rang l . Dann existieren Lagrangesche Multiplikatoren $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \in \mathbb{R}^l$ mit

$$\nabla f(z_0) = \lambda_1 \nabla g_1(z_0) + \dots + \lambda_l \nabla g_l(z_0) \quad (3.14)$$

Mit (3.14) und $g_1(z_0) = 0, \dots, g_l(z_0) = 0$ hat man $m + l$ Gleichungen für die Unbekannten $(z_0, \lambda) \in \mathbb{R}^{m+l}$, die man versuchen kann zu lösen.

BEWEIS. 1) Wie setzen $n = m - l \in \mathbb{N}$. Nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten ist $\partial_y g(x_0, y_0) \in L(\mathbb{R}^l)$ invertierbar, wobei $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+l}$ ist. Der Hauptsatz über implizit definierte Funktionen Theorem 3.40 liefert nun offene Teilmengen $U_x \subseteq \mathbb{R}^n$ und $U_y \subseteq \mathbb{R}^l$, sowie eine Abbildung $\varphi \in C^1(U_x, \mathbb{R}^l)$ mit $(x_0, y_0) \in U_x \times U_y \subseteq D$, $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi(U_x) \subseteq U_y$ und $g(x, \varphi(x)) = 0$ für alle $x \in U_x$. Es gibt einen Radius $r > 0$ mit $B(x_0, r) \subseteq U_x$.

2) Sei $k \in \{1, \dots, n\}$. Wir setzen nun $\alpha_k : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}$; $\alpha_k(\tau) = (x_0 + \tau e_k, \varphi(x_0 + \tau e_k))$, für die Einheitsvektoren e_k des $\mathbb{R}^n$. Dann gelten die Gleichungen $\alpha_k(0) = z_0$ und $\alpha'_k(0) = (e_k, \varphi'(x_0)e_k) =: v_k$. Wegen der e_k ist die Menge $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig und ihr linearer Aufspann T hat somit die Dimension n . Außerdem ist $g(\alpha_k(\tau)) = 0$ für alle $\tau \in (-r, r)$, sodass $\alpha_k(\tau)$ auf M liegt. Damit hat die Funktion $h_k : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$; $h_k(\tau) = f(\alpha_k(\tau))$, bei 0 ein Extremum. Satz 5.18 aus Analysis 1 und die Kettenregel Satz 3.11 implizieren nun

$$0 = h'_k(0) = f'(\alpha_k(0))\alpha'_k(0) = (\nabla f(z_0)|v_k)$$

für alle $k \in \{1, \dots, n\}$. Folglich steht $\nabla f(z_0)$ auf T senkrecht.

3) Aus der Gleichung $g(\alpha_k(\tau)) = 0$ ergibt sich mit der Kettenregel die Identität

$$0 = g'(\alpha_k(0))\alpha'_k(0) = g'(z_0)v_k$$

für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$. Also liegt T im Kern von $g'(z_0)$. Nach der Dimensionsformel und der Voraussetzung hat der Kern die Dimension $m - \dim g'(z_0)(\mathbb{R}^m) = m - l = n$, siehe etwa Satz 2.2.4 in [3]. Somit ist der Kern von $g'(z_0)$ gleich T und $\nabla f(z_0)$ steht auf ihm senkrecht. Satz 6.2.4 von [3] zeigt nun, dass $\nabla f(z_0)$ im Bild von $g'(z_0)^\top$ enthalten ist. Deshalb gibt es einen Vektor $\lambda \in \mathbb{R}^l$ mit

$$\nabla f(z_0) = g'(z_0)^\top \lambda = \lambda_1 \nabla g_1(z_0) + \dots + \lambda_l \nabla g_l(z_0). \quad \square$$

BEWEIS VON BEISPIEL 3.46. Sei $(x_0, y_0, z_0) \in D \cap E$ eine Maximalstelle von f auf E (etwa die im Beispiel konstruierte). Der Gradient $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ ist ungleich 0 und hat also den Rang $l = 1$. Theorem 3.47 liefert nun eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = 8 \begin{pmatrix} y_0 z_0 \\ x_0 z_0 \\ x_0 y_0 \end{pmatrix} = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) = 2\lambda \begin{pmatrix} a^{-2} x_0 \\ b^{-2} y_0 \\ c^{-2} z_0 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$f(x_0, y_0, z_0) = 8x_0 y_0 z_0 = 2\lambda a^{-2} x_0^2 = 2\lambda b^{-2} y_0^2 = 2\lambda c^{-2} z_0^2,$$

wobei $f(x_0, y_0, z_0) > 0$ ist. Wir summieren die drei rechten Seiten auf und nutzen aus, dass $g(x_0, y_0, z_0) = 0$ gilt. Somit erhalten wir

$$3f(x_0, y_0, z_0) = 2\lambda(a^{-2} x_0^2 + b^{-2} y_0^2 + c^{-2} z_0^2) = 2\lambda.$$

Also ist $2\lambda = 3f(x_0, y_0, z_0)$, sodass aus der oben abgesetzten Formel die Identität $f(x_0, y_0, z_0) = 3f(x_0, y_0, z_0)a^{-2} x_0^2$ und damit $x_0 = \frac{a}{\sqrt[3]{3}}$ folgen. Die Zahlen y_0 und z_0 berechnet man genauso und sie liefern den (damit eindeutig bestimmten) Maximalwert $\mu = f(x_0, y_0, z_0) = \frac{8}{3\sqrt{3}}abc$. $\square$

KAPITEL 4

Kurvenintegrale

Wir diskutieren Varianten des eindimensionalen Integrals, die in vielen Bereichen der Analysis und ihrer Anwendungen von großer Bedeutung sind.

4.1. Kurvenlänge

Sei $\gamma \in C([a, b], \mathbb{R}^m)$ eine Kurve (oder Weg) mit Spur $\Gamma = \gamma([a, b])$. Wir nennen $\gamma(a)$ den *Anfangspunkt* und $\gamma(b)$ den *Endpunkt*. Die Kurve Γ heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt, und *einfach*, wenn γ auf (a, b) injektiv ist. Sie *verläuft* (oder liegt) in $D \subseteq \mathbb{R}^m$, falls Γ in D enthalten ist.

Um die Länge von γ zu definieren, approximieren wir γ durch Streckenzüge. Dazu seien $a \leq b$ und $\mathcal{Z}(a, b)$ die Menge aller Zerlegungen $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ des Intervalls $[a, b]$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig ist, sowie $a = t_0$, $t_n = b$ und $t_{j-1} < t_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ gelten sollen, falls $a < b$ ist. Für $a = b$ sei $n = 0$ und $Z_a = \{a\}$. Wir schreiben $I_j = [t_{j-1}, t_j]$. Für $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ setzen wir

$$\ell(\gamma, Z) = \sum_{j=1}^n |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|_2.$$

Dies ist die Länge des Streckenzugs mit den Ecken $\gamma(a), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_{n-1}), \gamma(b)$. Für $a = b$ sei dabei $\ell(\gamma, Z_a) = 0$. Verfeinerungen von Z vergrößern diese Länge, da $\ell(\gamma, Z) \leq \ell(\gamma, Z \cup \{c\})$ wegen $|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|_2 \leq |\gamma(t_j) - \gamma(c)|_2 + |\gamma(c) - \gamma(t_{j-1})|_2$ gilt, wenn etwa $c \in I_j$ ist. Dies führt auf den nächsten Begriff.

DEFINITION 4.1. Eine Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist rektifizierbar (oder von beschränkter Variation) mit Länge $\ell(\gamma)$, wenn

$$\ell_{[a,b]}(\gamma) = \ell(\gamma) = \|\gamma\|_{\text{BV}} := \sup_{Z \in \mathcal{Z}(a,b)} \ell(\gamma, Z) < \infty.$$

Es gilt $\ell_{[a,a]}(\gamma) = 0$. Wir besprechen wichtige Eigenschaften dieser Begriffe.

BEMERKUNG 4.2. a) Rektifizierbarkeit und Stetigkeit sind unabhängig voneinander. Zum einen hat die unstetige Funktion $\mathbb{1}_{[0,1]} : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ die Länge 1, da $\ell(\gamma, Z) = 1$ für alle $Z \in \mathcal{Z}(0, 2)$ gilt. (Der Summand in $\ell(\gamma, Z)$ mit $1 \in [t_{j-1}, t_j]$ ist gleich 1, die anderen sind gleich 0.) Zum anderen haben wir die nicht rektifizierbare, aber stetige Funktion $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$; $\gamma(t) = (t, g(t))$, mit

$$g(t) = \begin{cases} t \sin(\pi/t), & 0 < t \leq 2, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

BEWEIS. Seien $t_{n-j} = (j + \frac{1}{2})^{-1}$ für $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $t_0 = 0$ und $Z_n = \{t_0, \dots, t_n\} \in \mathcal{Z}(0, 2)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |g(t_{n-j}) - g(t_{n-(j-1)})| &= \left| \frac{\sin(\pi j + \frac{\pi}{2})}{j + \frac{1}{2}} - \frac{\sin(\pi j - \frac{\pi}{2})}{j - \frac{1}{2}} \right| = \left| (-1)^j \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} + \frac{1}{j - \frac{1}{2}} \right) \right| \\ &= \frac{2j}{j^2 - \frac{1}{4}} \geq \frac{1}{j} \end{aligned}$$

für $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Damit erhalten wir die untere Abschätzung

$$\ell(\gamma, Z_n) = \sum_{k=1}^n \left((t_k - t_{k-1})^2 + |g(t_k) - g(t_{k-1})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \rightarrow \infty$$

für $n \rightarrow \infty$, sodass $\ell(\gamma) = \infty$ ist. $\square$

b) Seien $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $c \in [a, b]$. Dann gilt $\ell_{[a,b]}(\gamma) = \ell_{[a,c]}(\gamma) + \ell_{[c,b]}(\gamma)$, wobei wir die Rechenregeln $\infty = a + \infty = \infty + a$ für $a \in [0, \infty]$ verwenden.

BEWEIS. Wenn $\ell_{[a,c]}(\gamma)$ oder $\ell_{[c,b]}(\gamma)$ gleich ∞ sind, dann gilt dies auch für die Länge $\ell_{[a,b]}(\gamma)$ auf Grund ihrer Definition. Wir können also annehmen, dass diese beiden Terme endlich sind. Sei $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$. Wir definieren damit die Zerlegungen $\tilde{Z} = Z \cup \{c\} \in \mathcal{Z}(a, b)$, $\tilde{Z}_- = \tilde{Z} \cap [a, c] \in \mathcal{Z}(a, c)$ und $\tilde{Z}_+ = \tilde{Z} \cap [c, b] \in \mathcal{Z}(c, b)$. Mittels der Definition und der Dreiecksungleichung folgt

$$\ell(\gamma, Z) \leq \ell(\gamma, \tilde{Z}) = \ell(\gamma|_{[a,c]}, \tilde{Z}_-) + \ell(\gamma|_{[c,b]}, \tilde{Z}_+) \leq \ell_{[a,c]}(\gamma) + \ell_{[c,b]}(\gamma).$$

Im Supremum über $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ ergibt sich die Ungleichung ' $\leq$ ' in der Behauptung.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es Zerlegungen $Z_- \in \mathcal{Z}(a, c)$ und $Z_+ \in \mathcal{Z}(c, b)$ mit

$$\ell(\gamma|_{[a,c]}, Z_-) \geq \ell_{[a,c]}(\gamma) - \varepsilon, \quad \text{bzw.} \quad \ell(\gamma|_{[c,b]}, Z_+) \geq \ell_{[c,b]}(\gamma) - \varepsilon.$$

Wir setzen nun $Z = Z_- \cup Z_+ \in \mathcal{Z}(a, b)$. Da $Z_- \cap Z_+ = \{c\}$ ist, erhalten wir

$$\ell_{[a,c]}(\gamma) + \ell_{[c,b]}(\gamma) - 2\varepsilon \leq \ell(\gamma|_{[a,c]}, Z_-) + \ell(\gamma|_{[c,b]}, Z_+) = \ell(\gamma, Z) \leq \ell_{[a,b]}(\gamma).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die Gleichheit in der Behauptung. $\square$

Im Folgenden zeigen wir Rektifizierbarkeit nur mittels des folgenden Satzes (und Bemerkung 4.2 b)), der auch eine bequeme Formel für die Weglänge angibt.

SATZ 4.3. *Sei $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^m)$. Dann ist γ rektifizierbar mit der Weglänge*

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|_2 dt.$$

BEWEIS. Der Fall $a = b$ ist klar; es sei also $a < b$.

1) Sei $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$. Der Hauptsatz (3.5) und die Eigenschaften des Integrals liefern

$$\begin{aligned} \ell(\gamma, Z) &= \sum_{j=1}^n |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|_2 = \sum_{j=1}^n \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt \right|_2 \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)|_2 dt = \int_a^b |\gamma'(t)|_2 dt. \end{aligned}$$

Also ist γ rektifizierbar mit $\ell(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'|_2 dt$.

2) Sei $\varepsilon > 0$. Nach Heines Theorem 2.47 ist γ' gleichmäßig stetig. Also existiert so ein $n \in \mathbb{N}$, dass die Ungleichung $|\gamma'(t) - \gamma'(\tau)|_2 \leq \varepsilon$ für alle $t, \tau \in [a, b]$ mit $|t - \tau| \leq \delta_n := (b - a)/n$ gilt. Wir setzen $t_j = a + j\delta_n$ für $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Wie in Schritt 1) berechnen wir

$$\begin{aligned} \int_a^b |\gamma'(t)|_2 dt &= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t) - \delta_n^{-1}(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) + \delta_n^{-1}(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))|_2 dt \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\left| \gamma'(t) - \delta_n^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(\tau) d\tau \right|_2 + \delta_n^{-1} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|_2 \right) dt \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| \delta_n^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\gamma'(t) - \gamma'(\tau)) d\tau \right|_2 dt + \frac{\delta_n}{\delta_n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|_2 \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \delta_n^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t) - \gamma'(\tau)|_2 d\tau dt + \sum_{j=1}^n |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|_2 \\ &\leq \sum_{j=1}^n \delta_n^2 \delta_n^{-1} \varepsilon + \ell(\gamma) = (b - a)\varepsilon + \ell(\gamma). \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die Behauptung. $\square$

In späteren Vorlesungen benötigt man oft etwas allgemeinere Wege, die in der nächsten Bemerkung beschrieben werden.

BEMERKUNG 4.4. a) Nach Bemerkung 4.2 b) gilt Satz 4.3 auch für *stückweise* C^1 -Funktionen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$; d.h., $\gamma \in C([a, b], \mathbb{R}^m)$ erfüllt $\gamma|_{I_j} \in C^1(I_j, \mathbb{R}^m)$ für ein $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ und alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Dabei setzen wir $\gamma'(t_j) = \frac{d^+\gamma}{dt}(t_j)$ für $t_j < b$.

b) Seien γ wie in a) und $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ ein orientierungserhaltender C^1 -Parameterwechsel, siehe Bemerkung 3.2 c). Dann heißt $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ (orientierungserhaltende) C^1 -Umparametrisierung von γ . Die Kettenregel und die Substitutionsregel Satz 1.15 implizieren

$$\int_\alpha^\beta |\tilde{\gamma}'(s)|_2 ds = \sum_{j=1}^n \int_{\phi^{-1}(t_{j-1})}^{\phi^{-1}(t_j)} |\gamma'(\phi(s))|_2 \phi'(s) ds = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)|_2 dt = \int_a^b |\gamma'(t)|_2 dt,$$

wobei wir $\phi'(s) \geq 0$ verwendet und $t = \phi(s)$ substituiert haben. Also gilt $\ell(\gamma) = \ell(\tilde{\gamma})$. Wir schreiben deswegen auch $\ell(\Gamma)$ statt $\ell(\gamma)$, wenn γ einfach ist.⁶ $\diamond$

Wir fügen zwei einfache Beispiele an.

⁶Streng genommen ist eine C^1 -Kurve Γ eine Äquivalenzklasse von C^1 -Umparametrisierungen γ ; und nicht die Spur, die ja ganz unterschiedlich parametrisiert werden kann. Für Details verweisen wir auf den Text nach Bemerkung VIII.1.5 in [2]. Der Einfachheit halber beziehen wir uns meist auf γ und vermeiden in dieser Vorlesung Äquivalenzklassen.

BEISPIEL 4.5. a) Sei $\gamma : [0, \alpha]; \gamma(t) = r(\cos t \ \sin t)^\top$, für Konstanten $\alpha, r > 0$. Dann gelten $\gamma'(t) = r(-\sin t \ \cos t)^\top$ und

$$\ell(\gamma) = \int_0^\alpha |\gamma'(t)|_2 dt = \alpha r,$$

wobei γ den (eventuell mehrfach durchlaufene) Kreisbogen mit Bogenmaß α und Radius r parametrisiert.

b) Wir verwenden die Parameterisierung $\gamma : [0, 2\pi]; \gamma(t) = (a \cos(t) \ b \sin(t))^\top$, der Ellipse E mit Halbmessern $a, b > 0$, die auf $[0, 2\pi)$ injektiv ist. Dann gilt wie in a) die Gleichung

$$\ell(E) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt.$$

Hier findet man keinen expliziteren Ausdruck für die Kurvenlänge. $\diamond$

4.2. Kurvenintegrale und Potentiale

Wir führen nun Kurvenintegrale ein, wobei wir uns auf stückweise C^1 -Wege beschränken. Die Schreibweisen für diese Integrale sind in der Literatur nicht einheitlich, und oft werden sie in eine allgemeinere Theorie eingebettet. Ferner findet man in (vor allem älteren) Lehrbüchern eine weitere Klasse von Kurvenintegralen, die wir aber in Analysis 3 mitbehandeln werden.

DEFINITION 4.6. Seien $\gamma \in C([a, b], \mathbb{R}^m)$ stückweise C^1 , $\Gamma = \gamma([a, b])$, und $F \in C(\Gamma, \mathbb{R}^m)$. Das Kurvenintegral von F über γ ist

$$\int_\gamma F \cdot dx = \int_\gamma F(x) \cdot dx := \int_a^b (F(\gamma(t)) | \gamma'(t)) dt.$$

Das rechte Integral ist dabei als Riemannintegral mit stückweise stetigem Integranden erklärt. Für eine reguläre Kurve gilt $\ell(\gamma) = \int_\gamma F \cdot dx$ mit $F = \gamma'/|\gamma'|_2$. Wir notieren, dass sich die üblichen Eigenschaften des Integrals übertragen.

BEMERKUNG 4.7. Seien $\gamma \in C([a, b], \mathbb{R}^m)$ stückweise C^1 mit Spur Γ und Zerlegung $\{t_0, \dots, t_n\}$, sowie $F, G \in C(\Gamma, \mathbb{R}^m)$.

a) Sei $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine orientierungstreue Umparametrisierung von γ , siehe Bemerkung 4.4. Setze $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dann hat auch $\tilde{\gamma}$ die Spur Γ und ist stückweise C^1 . Mit Ketten- und Substitutionsregel berechnen wir

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta (F(\tilde{\gamma}(s)) | \tilde{\gamma}'(s)) ds &= \sum_{j=1}^n \int_{\phi^{-1}(t_{j-1})}^{\phi^{-1}(t_j)} (F(\gamma(\phi(s))) | \gamma'(\phi(s))) \phi'(s) ds \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} (F(\gamma(t)) | \gamma'(t)) dt = \int_a^b (F(\gamma(t)) | \gamma'(t)) dt. \end{aligned}$$

Für einfache γ schreiben wir deswegen auch $\int_\Gamma F \cdot dx$ statt $\int_\gamma F \cdot dx$, vergleiche aber Fußnote 6.

b) Seien auch $c \in (a, b)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

- 1) $\int_{\gamma} (\alpha F + \beta G) \cdot dx = \alpha \int_{\gamma} F \cdot dx + \beta \int_{\gamma} G \cdot dx$.
- 2) $\int_{\gamma} F \cdot dx = \int_{\gamma_1} F \cdot dx + \int_{\gamma_2} F \cdot dx$, wobei $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$ und $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$. (Wir schreiben hier $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, und es gilt $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ mit z.B. $\Gamma_1 = \gamma_1([a, c])$.)
- 3) $\left| \int_{\gamma} F \cdot dx \right| \leq \int_a^b |F(x)|_2 |\gamma'(t)|_2 dt \leq \ell(\gamma) \max_{x \in \Gamma} |F(x)|_2$.
- 4) Sei $\gamma^-(t) = \gamma(b - (t - a))$ für $t \in [a, b]$. Dann gilt $\int_{\gamma^-} F \cdot dx = - \int_{\gamma} F \cdot dx$.

BEWEIS. Die Aussagen folgen aus Satz 1.6 und 1.15. Wir beweisen exemplarisch

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} (\alpha F + \beta G) \cdot dx &= \int_a^b (\alpha F(\gamma(t)) + \beta G(\gamma(t)) | \gamma'(t)) dt \\
 &= \alpha \int_a^b (F(\gamma(t)) | \gamma'(t)) dt + \beta \int_a^b (G(\gamma(t)) | \gamma'(t)) dt \\
 &= \alpha \int_{\gamma} F \cdot dx + \beta \int_{\gamma} G \cdot dx, \\
 \int_{\gamma^-} F \cdot dx &= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} (F(\gamma(b - (t - a))) | -\gamma'(b - (t - a))) dt \\
 &= \sum_{j=1}^n \int_{b-t_{j-1}+a}^{b-t_j+a} (F(\gamma(\tau)) | \gamma'(\tau)) d\tau = - \int_{\gamma} F \cdot dx. \quad \square
 \end{aligned}$$

Das folgende Beispiel beleuchtet die Bedeutung des Kurvenintegrals in der Physik.

BEISPIEL 4.8. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$; $\gamma(t) = (r \cos(t) \ r \sin(t) \ ht)^T$ die Schraubenlinie mit Konstanten $r, h, a > 0$ und $b > a$. Dann gelten $|\gamma(t)|_2 = \sqrt{r^2 + h^2 t^2}$, $\gamma'(t) = (-r \sin(t) \ r \cos(t) \ h)^T$ und $(\gamma(t) | \gamma'(t)) = h^2 t$.

Die Gravitationskraft einer Masse $M > 0$ in $x_0 = 0$ auf $m > 0$ in $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist durch $F(x) = -CmM |x|_2^{-3} x$ mit einer Konstante $C > 0$ gegeben. Wenn man m entlang $\gamma(t)$ bewegt, verrichtet man gegen oder mit F die Arbeit

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} F \cdot dx &= \int_a^b (F(\gamma(t)) | \gamma'(t)) dt = \int_a^b \frac{-CmM}{(r^2 + h^2 t^2)^{3/2}} (\gamma(t) | \gamma'(t)) dt \\
 &= -CmM \int_a^b \frac{h^2 t}{(r^2 + h^2 t^2)^{3/2}} dt = -\frac{CmM}{2} \int_{r^2}^{r^2 + b^2 h^2} \tau^{-3/2} d\tau \\
 &= CmM \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2 h^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2}} \right) = CmM \left(\frac{1}{|\gamma(b)|_2} - \frac{1}{|\gamma(a)|_2} \right)
 \end{aligned}$$

verrichtet, wobei wir $\tau = r^2 + h^2 t^2$ substituiert haben. Man beachte, dass die Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt, aber nicht von γ selbst abhängt. $\diamond$

Eine Abbildung $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^m$ und $m \geq 2$ heißt auch *Vektorfeld*. Zumindest für $m \in \{2, 3\}$ kann man sie veranschaulichen, indem man sich den Pfeil $F(x) \in \mathbb{R}^m$ am Punkt $x \in D$ angefügt denkt. Bei der Funktion F in Beispiel 4.8 weist dabei $F(x)$ radial zum Ursprung. Man nennt solche Funktionen *Zentralfelder*. Motiviert durch dieses Beispiel, führen wir zwei Klassen von Funktionen ein.

DEFINITION 4.9. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Dann heißt $F \in C(D, \mathbb{R}^m)$ wegunabhängig auf D , wenn

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dx = \int_{\gamma_2} F \cdot dx$$

für alle stückweise C^1 -Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow D$ mit gleichem Anfangspunkt $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ und gleichem Endpunkt $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ gilt. Eine Funktion $\Phi \in C^1(D, \mathbb{R})$ heißt Potential von F auf D , wenn $\nabla \Phi = F$ auf D erfüllt ist.

Wir betonen, dass diese Begriffe von D abhängen. Mit Φ ist auch $\Phi + c\mathbb{1}$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ ein Potential. Wir diskutieren zwei typische Beispiele.

BEISPIEL 4.10. a) In Beispiel 4.8 hat $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$; $F(x) = -CmM|x|_2^{-3}x$, das (Newton-)Potential $\Phi(x) = CmM|x|_2^{-1}$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. (Verwende Beispiel 3.6.)

b) Sei $F : D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$; $F(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y \ x)^\top$. Wähle $\gamma_1(t) = (\cos t \ \sin t)^\top$ und $\gamma_2(t) = (1 \ 0)^\top$ für $t \in [0, 2\pi]$. Diese parametrisieren den ‘Kreisweg’ $\Gamma_1 = S(0, 1)$ und den konstanten Weg Γ_2 von $(1 \ 0)^\top$ nach $(1 \ 0)^\top$. Es gelten

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} F \cdot dx &= \int_0^{2\pi} (F(\gamma_2(t)) | \gamma_2'(t)) dt = \int_0^{2\pi} (F(1, 0) | (0, 0)) dt = 0, \\ \int_{\gamma_1} F \cdot dx &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t} \left(\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Also ist das ‘Wirbelfeld’ F auf D nicht wegunabhängig. $\diamond$

Der nächste Satz charakterisiert die Wegunabhängigkeit durch die Existenz eines Potentials und zeigt in diesem Fall den ‘Hauptsatz’ für Kurvenintegrale. Auf Grund dieser Charakterisierung hat das Vektorfeld F in Beispiel 4.10 b) kein Potential.

SATZ 4.11. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ ein Gebiet (d.h., offen und wegzusammenhängend) und $F \in C(D, \mathbb{R}^m)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- a) F ist wegunabhängig auf D .
- b) $\int_\gamma F \cdot dx = 0$ für jede geschlossene stückweise C^1 -Kurve γ mit Bild in D .
- c) F hat ein Potential Φ auf D .

In diesem Fall gilt ferner

$$\int_\gamma F \cdot dx = \Phi(\gamma(b)) - \Phi(\gamma(a))$$

für jede Kurve γ mit Bild in D , die stückweise C^1 ist.

BEWEIS. 1) Es gelte Aussage c) und γ sei stückweise C^1 in D mit der Zerlegung $\{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$, vergleiche Bemerkung 4.4 a). Dann liefert die Kettenregel und der Hauptsatz Theorem 1.10 die Gleichungen

$$\int_\gamma F \cdot dx = \int_0^{2\pi} (\nabla \Phi(\gamma(t)) | \gamma'(t)) dt = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{d}{dt} \Phi(\gamma(t)) dt$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\Phi(\gamma(t_j)) - \Phi(\gamma(t_{j-1})) \right) = \Phi(\gamma(b)) - \Phi(\gamma(a)).$$

Also folgt der Zusatz und, falls $\gamma(b) = \gamma(a)$ ist, auch Teil b).

2) Es gelte Behauptung b). Es seien γ_1 und γ_2 stückweise C^1 -Kurven von x nach y in D . Dann ist $\gamma := \gamma_1 \cup \gamma_2^-$ eine geschlossene stückweise C^1 -Kurve in D . Annahme b) und Bemerkung 4.7 liefern dann

$$0 = \int_{\gamma} F \cdot dx = \int_{\gamma_1} F \cdot dx - \int_{\gamma_2} F \cdot dx,$$

woraus Aussage a) folgt.

3) Es gelte Teil a). Sei $y_0 \in D$ fest gewählt und $y \in D$ beliebig. Nach Lemma 4.12 unten gibt es eine stückweise lineare Kurve γ_y von y_0 nach y mit Bild in D . Wegen Bedingung a) definiert

$$\Phi(y) = \int_{\gamma_y} F \cdot dx$$

eine Abbildung $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$. Seien $r > 0$ mit $B(y, r) \subseteq D$, $0 < |t| \leq r/2$ und $j \in \{1, \dots, m\}$. Wir setzen $\gamma_{t,j} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$; $\gamma_{t,j}(\tau) = y + \tau te_j$. Dann ist $\gamma'_{t,j}(\tau) = te_j$. Weiter verlaufen $\gamma_{t,j}$ und $\gamma_y^- \cup \gamma_{y+te_j}$ in D von y nach $y + te_j$. Aus Bemerkung 4.7 und Aussage a) schließen wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(\Phi(y + te_j) - \Phi(y)) &= \frac{1}{t} \int_{\gamma_{y+te_j}} F \cdot dx - \frac{1}{t} \int_{\gamma_y} F \cdot dx = \frac{1}{t} \int_{\gamma_y^- \cup \gamma_{y+te_j}} F \cdot dx \\ &= \frac{1}{t} \int_{\gamma_{t,j}} F \cdot d\tau = \frac{1}{t} \int_0^1 (F(y + \tau te_j) | te_j) d\tau \\ &= \int_0^1 F_j(y + \tau te_j) d\tau. \end{aligned}$$

Da die Funktion $[-r/2, r/2] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$; $(t, \tau) \mapsto F_j(y + \tau te_j)$, stetig ist, erlaubt es Korollar 2.48 den Limes $t \rightarrow 0$ unter das Integral zu ziehen. Also konvergiert $\frac{1}{t}(\Phi(y + te_j) - \Phi(y))$ für $t \rightarrow 0$ gegen $F_j(y)$, und Behauptung c) gilt. $\square$

Im obigen Beweis haben wir das folgende nützliche Resultat verwendet.

LEMMA 4.12. *Seien X ein normierter Vektorraum, $D \subseteq X$ ein Gebiet und $x, y \in D$. Dann gibt es eine stückweise lineare Kurve, die in D von x nach y verläuft.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung existiert ein Weg $\tilde{\gamma} \in C([0, 1], \mathbb{R}^m)$ mit $\tilde{\Gamma} = \tilde{\gamma}([0, 1]) \subseteq D$, $\tilde{\gamma}(0) = x$ und $\tilde{\gamma}(1) = y$. Die Spur $\tilde{\Gamma}$ ist nach Theorem 2.49 kompakt und schneidet ∂D nicht. Deswegen liefert Korollar 2.52 die Abschätzung

$$\forall z \in \tilde{\Gamma}, p \in \partial D : |z - p|_2 \geq \inf_{q \in \partial D} \inf_{w \in \tilde{\Gamma}} |w - q|_2 =: \varepsilon > 0.$$

Da $\tilde{\gamma}$ nach Heines Theorem 2.47 gleichmäßig stetig ist, gibt es so ein $n \in \mathbb{N}$, dass für alle $t, s \in [0, 1]$ mit $|t - s| \leq 1/n$ die Ungleichung $|\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(s)|_2 \leq \varepsilon/2$ gilt. Sei $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Für $t_j := j/n$ folgt $|\tilde{\gamma}(t_j) - \tilde{\gamma}(t_{j-1})|_2 \leq \varepsilon/2$. Für $s \in [t_{j-1}, t_j]$

gibt es genau ein $\tau(s) = \tau \in [0, 1)$ mit $s = \tau t_j + (1 - \tau)t_{j-1}$, nämlich $\tau(s) = (s - t_{j-1})/(t_j - t_{j-1})$. Wir definieren nun

$$\gamma(s) = \tau(s)\tilde{\gamma}(t_j) + (1 - \tau(s))\tilde{\gamma}(t_{j-1}) \quad \text{für } s \in [t_{j-1}, t_j) \text{ und } j \in \{1, \dots, n\},$$

sowie $\gamma(1) = y$. Dann ist γ in $C([0, 1], \mathbb{R}^m)$ enthalten und stückweise linear mit $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = x$ und $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(1) = y$. Für die obigen s erhalten wir ferner

$$|\gamma(s) - \tilde{\gamma}(t_{j-1})|_2 = \tau(s) |\tilde{\gamma}(t_j) - \tilde{\gamma}(t_{j-1})|_2 \leq \varepsilon/2.$$

Also liegt $\gamma(s)$ in $\overline{B}(\tilde{\gamma}(t_{j-1}), \varepsilon/2) \subseteq D$, sodass γ nur Werte in D annimmt. $\square$

Wir zeigen eine bequeme notwendige Bedingung für die Wegunabhängigkeit.

SATZ 4.13. *Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Wenn F in $C^1(D, \mathbb{R}^m)$ ein Potential $\Phi \in C^1(D, \mathbb{R})$ besitzt, dann ist $F'(x)$ für jedes $x \in D$ symmetrisch; es gilt also*

$$\forall j, k \in \{1, \dots, m\}, x \in D : \quad \partial_k F_j(x) = \partial_j F_k(x). \quad (4.1)$$

BEWEIS. Da $\nabla \Phi = F$ gilt, liegt Φ in $C^2(D, \mathbb{R})$. Schwarz' Theorem 3.24 impliziert nun $\partial_k F_j = \partial_k \partial_j \Phi = \partial_j \partial_k \Phi = \partial_j F_k$ für alle $j, k \in \{1, \dots, m\}$. $\square$

Die folgende Bemerkung zeigt, dass die Umkehrung des Satzes nicht immer gilt.

BEMERKUNG 4.14. a) Für Vektorfelder $F \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$ definiert man die *Rotation*

$$\text{rot } F = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} \quad \text{für } x \in D.$$

Für $m = 3$ gilt genau dann (4.1), wenn $\text{rot } F(x) = 0$ für jedes $x \in D$ erfüllt ist.

b) Wie man leicht nachrechnet, genügt F in Beispiel 4.10 b) der Bedingung (4.1), aber F hat wegen Satz 4.11 kein Potential auf $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. $\diamond$

Man kann die Wegunabhängigkeit durch die Symmetriebedingung (4.1) charakterisieren, wenn man zusätzliche Annahmen an D stellt. Der folgende *Satz von Poincaré* ist das einfachste Resultat in diese Richtung und damit der Ausgangspunkt für wichtige Teilbereiche der Mathematik. Man beachte, dass das Gebiet $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in Bemerkung 4.14 b) nicht sternförmig ist, da es ein 'Loch' hat.

THEOREM 4.15. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und sternförmig (siehe Bemerkung 2.57 b)). Eine Funktion $F \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ erfülle (4.1). Dann hat F ein Potential auf D . Insbesondere hat $F \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ auf jeder Kugel $B(x_0, r) \subseteq U$ ein (lokales) Potential, wenn $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen ist und F die Bedingung (4.1) auf U erfüllt.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung existiert so ein Punkt $z \in D$, dass für alle $y \in D$ die Strecke $\overrightarrow{zy}$ von z nach y ganz in D verläuft. Diese Strecke wird durch $\gamma_y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$; $\gamma_y(t) = z + t(y - z)$, parametrisiert. Wir setzen

$$\Phi(y) = \int_{\gamma_y} F \cdot dx = \int_0^1 (F(z + t(y - z)) \mid y - z) dt = \sum_{j=1}^m \int_0^1 F_j(z + t(y - z)) (y_j - z_j) dt$$

Da F stetig differenzierbar ist, können wir gemäß des nächsten Satzes Φ partiell ableiten und die Ableitung unter das Integral ziehen. Mit Hilfe der Kettenregel, der Annahme (4.1) und des Hauptsatzes berechnen wir dann

$$\begin{aligned}\partial_k \Phi(y) &= \sum_{j=1}^m \int_0^1 \partial_{y_k} (F_j(z + t(y - z)) (y_j - z_j)) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^m (\partial_k F_j)(z + t(y - z)) t(y_j - z_j) + F_k(z + t(y - z)) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^m (\partial_j F_k)(z + t(y - z)) t(y_j - z_j) + F_k(z + t(y - z)) \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t F_k(z + t(y - z))) dt = F_k(y)\end{aligned}$$

für $k \in \{1, \dots, m\}$. Also ist Φ stetig differenzierbar und ein Potential von F . $\square$

Im obigen Beweis haben wir Ableitung und Integral vertauscht, was unter gewissen Stetigkeitsannahmen erlaubt ist, wie der nächste Satz zeigt.

SATZ 4.16. *Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : D \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und es existiere $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in C(D \times [a, b], \mathbb{R})$ für ein $k \in \{1, \dots, m\}$. Dann existiert auch*

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_k} f(x, t) dt.$$

BEWEIS. Es seien $x \in D$ und $k \in \{1, \dots, m\}$. Es gibt einen Radius $r > 0$ mit $\overline{B}(x, r) \subseteq D$. Sei $h \in [-r, r] \setminus \{0\}$. Der Hauptsatz, die Kettenregel und die Rechenregeln für das Integral implizieren

$$\begin{aligned}& \left| \frac{1}{h} \left(\int_a^b f(x + h e_k, t) dt - \int_a^b f(x, t) dt \right) - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_k} f(x, t) dt \right| \\ &= \left| \int_a^b \left(\frac{1}{h} (f(x + h e_k, t) - f(x, t)) - \frac{\partial}{\partial x_k} f(x, t) \right) dt \right| \\ &= \left| \int_a^b \frac{1}{h} \int_0^h \left(\frac{d}{d\tau} f(x + \tau e_k, t) - \frac{\partial}{\partial x_k} f(x, t) \right) d\tau dt \right| \\ &\leq \int_a^b \frac{1}{|h|} \left| \int_0^h \left(\nabla_x f(x + \tau e_k, t) \cdot e_k - \frac{\partial}{\partial x_k} f(x, t) \right) d\tau \right| dt \\ &\leq (b - a) \frac{|h|}{|h|} \sup_{t \in [a, b], |\tau| \leq |h|} \left| \frac{\partial}{\partial x_k} f(x + \tau e_k, t) - \frac{\partial}{\partial x_k} f(x, t) \right|.\end{aligned}$$

Sei $\varphi : [-|h|, |h|] \rightarrow \mathbb{R}$; $\varphi(\tau) = x + \tau e_k$. Nach Theorem 2.49 ist das Bild $\varphi([-|h|, |h|])$ kompakt. Damit ist auch die Produktmenge $K = \varphi([-|h|, |h|]) \times [a, b]$ nach einer Übung kompakt. Folglich ist die Funktion $\frac{\partial}{\partial x_k} f$ auf K gleichmäßig stetig, siehe Theorem 2.47. Somit konvergiert das obige Supremum für $h \rightarrow 0$ gegen 0. $\square$

KAPITEL 5

Gewöhnliche Differentialgleichungen

In eine gewöhnlichen Differentialgleichung gehen die gesuchte Funktion in einer Variablen und manche ihrer Ableitungen ein. Man kann für diese Problemklasse ausgehend vom ersten Studienjahr eine recht umfassende und weitreichende Theorie entwickeln, die die Grundlage für viele Anwendungen in den anderen Wissenschaften ist, vergleiche [7]. Wir geben hier einen Einblick in diese Thematik, wobei wir meist eine etwas vereinfachte Situation betrachten und gelegentlich Beweise nur unter verstärkten Annahmen führen. Auf diese Weise können wir exemplarisch auch etwas tiefer liegende Aussagen und typische Anwendungen behandeln. Das Themengebiet wird in Analysis 4 wieder aufgegriffen und dann systematisch diskutiert. In der Analysis für das Lehramt wird die Darstellung aus Zeitgründen knapper sein.

5.1. Einführung

In Abschnitt 1.4 haben wir schon gewöhnliche Differentialgleichungen der Form

$$u'(t) = g(t)h(u(t)), \quad t \in [0, \bar{t}), \quad u(0) = u_0, \quad (5.1)$$

in $\mathbb{R}$ betrachtet. Hierbei sind die Funktionen $g \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R})$ und $h \in C((a, b), \mathbb{R})$, sowie ein Anfangswert $u_0 \in (a, b)$ mit $h(u_0) \neq 0$ gegeben, und es ist eine *Lösung* $u \in C^1([0, \bar{t}))$ von (5.1) mit Endzeit $\bar{t} \in (0, \infty]$ und $u(t) \in (a, b)$ für $t \in [0, \bar{t})$ gesucht. In dieser Situation zeigt Satz 1.31, dass es eine eindeutige Lösung von (5.1) mit einem ‘maximalen’ $\bar{t}$ gibt, für die man auch eine (evt. implizite) Lösungsformel hat. Bei nichtlinearen Problemen ist dies der einzige Fall, in dem man solche Formeln systematisch berechnen kann. (Siehe Abschnitt 5.3 für lineare Systeme.)

In Beispiel 1.32 haben wir schon wichtige Phänomene kennengelernt, die bei ganz einfachen Gleichungen auftreten können. So hat das Problem

$$u'(t) = u(t)^2, \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0 > 0, \quad (5.2)$$

die Lösung $u(t) = \left(\frac{1}{u_0} - t\right)^{-1}$ mit $0 \leq t < \frac{1}{u_0} = \bar{t}$. Hier erhalten wir die ‘Explosion’ (oder den ‘Blowup’) $u(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \frac{1}{u_0}$. Dieses Verhalten kann recht allgemein bei nichtlinearen Differentialgleichungen auftreten. In Abschnitt 5.2 werden wir diese Frage näher untersuchen.

Ferner kann man in (5.1) die Eindeutigkeit der Lösung verlieren, wenn man $h(u_0) = 0$ zulässt. Das einfachste Beispiel ist die Gleichung

$$u'(t) = \sqrt{u(t)}, \quad t \geq 0, \quad u(0) = 0. \quad (5.3)$$

Für $\alpha \in [0, \infty]$ besitzt sie die Lösungen

$$u_\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}; \quad u_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \alpha, \\ \frac{1}{4}(t - \alpha)^2, & t \geq \alpha. \end{cases}$$

Im Abschnitt 5.2 geben wir eine einfach zu überprüfende Annahme an, die die Eindeutigkeit der Lösungen erzwingt.

Wir diskutieren nun zwei typische zweidimensionale Beispiele, wobei wir mit dem *Räuber-Beute-Modell* (mit oder ohne Sättigung) von Volterra und Lotka beginnen, siehe auch die Beispiele 5.15 und 5.29.

BEISPIEL 5.1. Es seien $u(t) \geq 0$ die (relative) Anzahl einer Beutepopulation und $v(t) \geq 0$ die einer Räuberpopulation zur Zeit $t \geq 0$. Um ihre zeitliche Änderung zu bestimmen, postulieren wir die folgenden Eigenschaften.

- 1) Die Beutepopulation wächst ohne Räuber entweder exponentiell (bei unbegrenzten Ressourcen, siehe Beispiel 1.29) oder mit Sättigung (bei begrenzten Ressourcen, siehe Beispiel 1.30).
- 2) Die Räuberpopulation fällt ohne Beute exponentiell (da sie keine andere Nahrungsquelle habe).
- 3) Die Beute(Räuber-)population fällt (wächst) proportional zum Produkt $u(t)v(t)$, das der Häufigkeit eines ‘zufälligen’ Zusammentreffens entspricht.

Diese Annahmen führen auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} u'(t) &= au(t) - bu(t)^2 - ru(t)v(t), & t \geq 0, & \quad u(0) = u_0, \\ v'(t) &= -cv(t) + su(t)v(t), & t \geq 0, & \quad v(0) = v_0, \end{aligned} \tag{5.4}$$

für fest gegebene Parameter $a, c, r, s > 0$ und $b \geq 0$, sowie Anfangswerte $u_0, v_0 \geq 0$. Hier könnten die Parameter auch von der Zeit t abhängen (etwa um die Abhängigkeit von der Tageszeit zu modellieren). Im Gegensatz zum folgenden Beispiel aus der Physik können die Daten in (5.4) in der Regel nicht sicher gemessen werden. Analog formuliert man komplexere Modelle mit mehr Spezies $u_1, \dots, u_m$.

Ähnliche Gleichungen beschreiben chemische Reaktionen, und (einfachere) Varianten bilden Grundmodelle für die zeitliche Entwicklung von Epidemien, vergleiche [6], [7]. Wir haben das obige Problem gewählt, da es keine weiteren Vorkenntnisse erfordert und besonders gut zu den hier und in Analysis 4 erzielten Resultaten passt. Wenn man in einem dieser Fälle etwa auch die räumliche Ausbreitung beschreiben möchte, müssen die Mengen u_k der Spezies zusätzlich von einer Raumvariablen x abhängen, und es gehen dann auch Ableitungen in x in die Beschreibung ein. Dies führt auf weitaus kompliziertere partielle Differentialgleichungen. $\diamond$

Wir betrachten nun mit der *Pendelgleichung* (mit und ohne Dämpfung) ein einfaches Beispiel aus der Physik, siehe Beispiele 5.13 und 5.30.

BEISPIEL 5.2. Ein Punkt der Masse $m > 0$ pendele an einem Stab der Länge $l > 0$, $\gamma > 0$ sei die Gravitationskonstante und $u(t)$ der Auslenkungswinkel (im

Bogenmaß) zur Zeit $t \geq 0$. Also ist der zurückgelegte Weg gleich der Bogenlänge $lu(t)$, die Geschwindigkeit gleich $lu'(t)$ und die Beschleunigung gleich $lu''(t)$.

Auf den Massenpunkt m wirkt dann die Tangentialkomponente $F_t(t) = -\gamma m \sin u(t)$ der Gravitationskraft $F = -\gamma m$, da er sich nur auf dem Kreisbogen bewegen kann. Weiter gebe es eine Reibungskraft $-r(u'(t))$, wobei $r \in C^1(\mathbb{R})$ und $-yr(y) \leq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gelten sollen. Damit wirkt die Reibung entgegen der Pendelrichtung und hängt nur von der Geschwindigkeit ab. (Ein typisches Beispiel ist $r(y) = r_0 y^{2k+1}$ für Konstanten $r_0 \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$.)

Laut dem zweiten Newtonschen Gesetz (Masse mal Beschleunigung gleich Kraft), erfüllt u die Gleichungen

$$\begin{aligned} u''(t) &= -\frac{\gamma}{l} \sin u(t) - \frac{1}{lm} r(u'(t)) =: g(u(t), u'(t)), \quad t \geq 0, \\ u(0) &= u_0, \quad u'(0) = v_0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

für gegebene $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$. Man braucht hier zwei Anfangsbedingungen, da durch die Angabe der Anfangsauslenkung u_0 das weitere Verhalten offenbar noch nicht festgelegt ist. (Man kann ja z.B. das Pendel nach links oder rechts anstoßen.)

Man kann aus den Newtonschen Gesetzen auch die Bewegungsgleichungen von komplexeren Systemen mit N Massenpunkten herleiten. (Bei freier Bewegbarkeit im Raum hat der k -te Massenpunkt die Position $u_k(t) \in \mathbb{R}^3$ und die Geschwindigkeit $u'_k(t) \in \mathbb{R}^3$, sodass man im $\mathbb{R}^{6N}$ arbeiten muss.) Analog beschreiben Schwingungsgleichungen die Ströme, Ladungen und Spannungen in (Teil-)Stromkreisen. $\diamond$

Es sei noch erwähnt, dass man in diesen beiden Beispielen im ungedämpften Fall (d.h., $b = 0$ in (5.4) bzw. $r = 0$ in (5.5)) implizite Lösungsformeln herleiten kann, siehe Analysis 4. Explizite Formeln kann man aber nicht erhalten, und selbst implizite gibt es im gedämpften Fall nicht.

Wir führen die Klasse gewöhnlicher Differentialgleichungen ein, die wir im Folgenden untersuchen werden. Seien $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und $u_0 \in \mathbb{R}^m$. Wir suchen ein Intervall J_0 mit $\min J_0 = 0 < \sup J_0$ und eine Lösung $u \in C^1(J_0, \mathbb{R}^m)$ des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \geq 0, \quad u(t_0) = u_0. \quad (5.6)$$

(Hier steht ' $t \geq 0$ ' für ' $t \in J_0$ mit möglichst großem J_0 '.) Man sagt auch, dass u das Problem (5.6) auf J_0 löst, und nennt $u'(t) = f(t, u(t))$ *Differentialgleichung erster Ordnung*. Das Problem heißt *autonom*, wenn $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ selbst nicht von t abhängt. In Analysis 4 betrachten wir die folgende allgemeinere Situation.

- 1) Für ein Intervall J und eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{R}^m$ sei $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dann muss man von der Lösung auch $u(t) \in D$ für all $t \in J_0$ fordern.
- 2) Man erlaubt irgendeine Anfangszeit $t_0 \in J$ und betrachtet auch Zeiten $t \leq t_0$. Die Theorie wird sich in dieser Situation nicht grundsätzlich ändern, aber an manchen Stellen etwas komplexer werden.

Die Pendelgleichung (5.5) beinhaltet allerdings auch u'' . Dieser Fall kann aber leicht auf (5.6) zurückgeführt werden.

BEMERKUNG 5.3. Seien $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig, $u_0, v_0 \in \mathbb{R}^m$, und J_0 wieder ein Intervall mit $\min J_0 = 0 < \sup J_0$. Sei $u \in C^2(J_0, \mathbb{R}^m)$ eine Lösung des *Anfangswertproblems zweiter Ordnung*

$$u''(t) = g(t, u(t), u'(t)), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0, \quad (5.7)$$

auf J_0 . Wir setzen nun

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}; \quad f(t, x, y) = \begin{pmatrix} y \\ g(t, x, y) \end{pmatrix}, \quad w_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Dann liegt $w := (u, u')$ in $C^1(J_0, \mathbb{R}^{2m})$ und erfüllt (5.6) mit diesem f und $w(0) = w_0$.

Umgekehrt löse $w \in C^1(J_0, \mathbb{R}^{2m})$ das Problem (5.6) für die obigen f und w_0 . Setze $u = w_1$. Dann gelten $u' = w'_1 = w_2$ und $w'_2(t) = g(t, u(t), w_2(t))$ wegen (5.6), sodass u in $C^2(J_0, \mathbb{R}^m)$ ist und (5.7) löst.

Das obige Vorgehen kann man leicht auf höhere Ableitungen verallgemeinern. In Beispiel 5.2 gilt $f(x, y) = \left(y, -\frac{\gamma}{l} \sin x - \frac{1}{lm} r(y)\right)$. $\diamond$

Im Kontext von (5.6) interpretieren wir $u(t) \in \mathbb{R}^m$ als *Zustand* eines Systems zur Zeit $t \geq 0$, das man mit m Zahlen beschreiben kann. Der *Anfangszustand* ist dabei der gegebene Vektor $u_0 \in \mathbb{R}^m$. Dann bestimmt (5.6) die momentane Änderung $u'(t)$ des Zustands als Funktion des aktuellen Zustandes $u(t)$. So ist zu erwarten, dass (5.6) eine eindeutige Lösung u besitzt. Man beachte, dass $u'(t)$ der Tangentenvektor der Lösungskurve $t \mapsto u(t)$ ist.

Aus dieser Interpretation ergeben sich (zunächst) die folgende Grundfragen.

- 1) Gibt es genau eine Lösung $u = u(\cdot; u_0)$ des Systems für jeden Startwert u_0 ? (Macht man also stets eine testbare Vorhersage über das Modell?)
- 2) Ist die Abbildung $u_0 \mapsto u(t; u_0)$ stetig? (Dann hängt die Vorhersage kontrolliert von Messfehlern in den Anfangsdaten ab.⁷)
- 3) Ist $J_0 = J_0(u_0) = \mathbb{R}_{\geq 0}$? Man nennt dann die Lösung *global*.
- 4) Bleibt die Lösung etwa in Beispiel 5.1 nichtnegativ, wenn $u_0, v_0 \geq 0$ ist? Oder allgemeiner: Bleibt die Lösung in Zustandsbereichen, die für das Problem relevant sind?
- 5) Gibt es konstante oder periodische Lösungen für geeignete Anfangswerte?
- 6) Was geschieht für $t \rightarrow \infty$? Konvergiert die Lösung, stirbt etwa in Beispiel 5.1 eine Spezies aus?
- 7) Sei u_* eine konstante Lösung und $u_0 \approx u_*$. Gilt dann $u(t) \approx u_*$ für alle $t \geq 0$ ('Stabilität')?

Diesen Fragen werden wir uns teilweise hier und gründlicher in Analysis 4 widmen. Wenn 1) und 2) erfüllt sind, heißt (5.6) *wohlgestellt*.

Gewöhnliche Differentialgleichungen haben auch andere Interpretationen. So beschreiben sie zeitlich konstante (stationäre) Probleme in einer Raumdimension (z.B. die Verformung eines befestigten Stabes unter Last). Hier ist oft $x \in [a, b]$

⁷Tatsächlich sollte man auch die Stetigkeit von $f \mapsto u(t) = u(t; u_0, f)$ zeigen, siehe Analysis 4.

die (Raum-)Variable, und die Lösung muss Bedingungen wie $u(a) = 0 = u(b)$ am Rand genügen. Man spricht von *Randwertproblemen*. Allgemeiner treten diese als Hilfsprobleme in den partiellen Differentialgleichungen auf.

5.2. Wohlgestelltheit und globale Existenz

Wir definieren zuerst unsere zentrale Bedingung an die Funktion f in der gewöhnlichen Differentialgleichung (5.6). Diese Eigenschaft liefert insbesondere die Eindeutigkeit der Lösungen, erlaubt aber auch einen besonders eleganten Existenzbeweis. Die folgenden Ausführungen vereinfachen sich für autonome Systeme ein wenig. Wir gehen immer wieder auf diesen Sonderfall ein. Für spätere Vorlesungen formulieren wir die einführenden Begriffe und Aussagen allgemeiner als in (5.6).

DEFINITION 5.4. *Seien $M \subseteq \mathbb{R}^m$ und J ein Intervall. Eine Funktion $g : J \times M \rightarrow \mathbb{R}^l$ heißt lokal Lipschitz in x , wenn es für jedes Paar $(t_0, x_0) \in J \times M$ solche Zahlen $\delta = \delta(t_0, x_0) > 0$, $r = r(t_0, x_0) > 0$ und $L = L(t_0, x_0) \geq 0$ gibt, dass die Ungleichung*

$$|g(t, x) - g(t, y)|_2 \leq L |x - y|_2 \quad (5.8)$$

für alle $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap J$ und $x, y \in \overline{B}(x_0, r) \cap M$ gilt. Wenn g nicht von t abhängt, lässt man ‘in x ’ weg und spricht von lokaler Lipschitz Stetigkeit. Falls (5.8) für alle $t \in J$ und $x, y \in M$ gilt, ersetzt man ‘lokal’ durch ‘global’ (oder lässt es weg).

Aus der nächsten wichtigen Bemerkung ergibt sich insbesondere, dass Funktionen $f \in C^1(D, \mathbb{R}^l)$ Lipschitz stetig auf allen kompakten Teilmengen von D sind. Man beachte, dass stetige Differenzierbarkeit in Beispielen oft leicht nachzuweisen ist.

BEMERKUNG 5.5. a) Seien $f \in C(J \times D, \mathbb{R}^l)$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, J ein Intervall und es existiere $\partial_{x_k} f \in C(J \times D, \mathbb{R}^l)$ für alle $k \in \{1, \dots, m\}$. Dann ist f lokal Lipschitz in x . Wenn f nicht von t abhängt und in $C^1(D, \mathbb{R}^l)$ liegt, dann ist f lokal Lipschitz.

BEWEIS. Sei $(t_0, x_0) \in J \times M$. Wir wählen Radien $r > 0$ mit $\overline{B}(x_0, r) \subseteq D$ und, wenn $t_0 \in J^\circ$ ist, $\delta > 0$ mit $J_0 := [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq J$. Falls etwa $t_0 = \min J$ ist, dann nimmt man ein $\delta > 0$ mit $J_0 := [t_0, t_0 + \delta] \subseteq J$; und entsprechend für einen rechten Randpunkt t_0 . Als stetige Funktion ist $(t, x) \mapsto |\partial_{x_k} f(t, x)|_2$ auf der kompakten (und konvexen) Teilmenge $K := J_0 \times \overline{B}(x_0, r)$ von $J \times D$ durch die Zahl $L := \max_{(t,x) \in K} |\partial_{x_k} f(t, x)|_2$ beschränkt, siehe Theorem 2.50. Nach Satz 3.23 ist dann für jede feste Zeit $t \in J_0$ die Abbildung $\overline{B}(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}^l$; $x \mapsto f(t, x)$, Lipschitz stetig mit Konstanten L . Diese Aussage liefert die Behauptungen. $\square$

b) Polynomiale nichtlineare f (wie in Beispiel 5.1) sind nicht auf $M = \mathbb{R}^m$ global Lipschitz stetig, vergleiche Bemerkung 2.35 im Fall $m = 1$. Man muss also lokal Lipschitz stetige f zulassen, um solche Standardbeispiele behandeln zu können.

c) Die Funktion $g : J \times M \rightarrow \mathbb{R}^l$ für $M \subseteq \mathbb{R}^m$ sei lokal Lipschitz in x und stetig. Dann gibt es für alle $a < b$ mit $[a, b] \subseteq J$ und kompakten Teilmengen $K \subseteq M$ so eine Zahl $L = L(a, b, K) > 0$, dass (5.8) für alle $t \in [a, b]$ und $x, y \in K$ erfüllt ist.

BEWEIS. Wir nehmen an, die Behauptung wäre falsch. Dann existieren ein Intervall $[a, b] \subseteq J$ und eine kompakte Teilmenge $K \subseteq M$ derart, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zeit $t_n \in [a, b]$ und Punkte $x_n, y_n \in K$ mit

$$|g(t_n, x_n) - g(t_n, y_n)|_2 > n |x_n - y_n|_2 \quad (5.9)$$

gibt. Insbesondere ist $x_n \neq y_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Auf Grund der Kompaktheit finden wir sukzessive Teilfolgen mit $t_{n_j} \rightarrow t_0$ in $[a, b]$, $x_{n_j} \rightarrow x_0$ in K und $y_{n_j} \rightarrow y_0$ in K für $j \rightarrow \infty$. Da g stetig ist, konvergiert die linke Seite in (5.9) mit n_j statt n für $j \rightarrow \infty$, sodass $x_0 = y_0$ sein muss. Wir wählen zu t_0 und x_0 die Zahlen $\delta, r > 0$ und $L \geq 0$ aus Definition 5.4. Dann gibt es so einen Index j_0 , dass für alle $j \geq j_0$ die Zeiten t_{n_j} in $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap J$ und die Punkte x_{n_j} und y_{n_j} in $\overline{B}(x_0, r) \cap M$ liegen. Aus (5.8) folgt nun die Abschätzung

$$n_j |x_{n_j} - y_{n_j}|_2 < |g(t_{n_j}, x_{n_j}) - g(t_{n_j}, y_{n_j})|_2 \leq L |x_{n_j} - y_{n_j}|_2$$

für alle $j \geq j_0$, was unmöglich ist. $\square$

Um (5.6) zu lösen, formulieren wir das Problem mittels des Hauptsatzes in eine Integralgleichung in Fixpunktform um. Dies ist nützlich, da Integrale glätten und Ableitungen hingegen Regularität verbrauchen.

LEMMA 5.6. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $J_0 \subseteq J$ Intervalle, $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig, $u_0 \in D$, $t_0 \in J_0$ und $u \in C(J_0, D)$. Genau dann gelten $u'(t) = f(t, u(t))$ für $t \in J_0$ und $u(t_0) = u_0$, wenn u die Gleichung

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds \quad (5.10)$$

für alle $t \in J_0$ erfüllt.

BEWEIS. Nach Satz 2.30 ist mit u und f auch die Abbildung $J_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$; $t \mapsto f(t, u(t))$, stetig. Es ist klar, dass die Funktion in (5.10) die Anfangsbedingung $u(t_0) = u_0$ erfüllt. Aus (5.10) folgt mit dem Hauptsatz (3.4), dass u in (5.10) die (stetige) Ableitung $f(t, u(t))$ besitzt. Umgekehrt erfüllt eine Lösung von (5.6) die Integralgleichung (5.10) auf Grund der anderen Hälfte (3.5) des Hauptsatzes. $\square$

Das folgende *Wohlgestelltheitstheorem von Picard-Lindelöf*⁸ bildet die Grundlage für die Untersuchung gewöhnlicher Differentialgleichungen. In seinen Aussagen und Methoden ist es auch ein wesentliches Vorbild für die Behandlung zeitabhängiger partieller Differentialgleichungen.

Im Satz von Picard-Lindelöf fordern wir von f nur leicht überprüfbare Eigenschaften, die in den typischen Anwendungen gelten. (Im autonomen Fall reicht $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$.) Für jeden Startwert $u_0 \in \mathbb{R}^m$ sichert das Theorem eine eindeutige Lösung $u = u(\cdot; u_0)$ von (5.6) auf dem *maximalen Existenzintervall* $[0, \bar{t}(u_0))$, wobei $\bar{t}(u_0) \in (0, \infty]$ in Aussage a) definiert wird. Beispiel (5.2) belegt, dass $\bar{t}(u_0)$ endlich

⁸Manche Aussagen des Theorems waren in der Vorlesung etwas schwächer formuliert worden.

sein kann. Man beachte auch, dass die Einschränkung einer Lösung wieder eine Lösung ist – deshalb formulieren wir in b) eine recht flexible Eindeutigkeitsaussage.

Die Maximalität von $\bar{t}(u_0)$ wird durch die *Blowup-Bedingung* in Punkt c) ausgedrückt: Wenn $\bar{t}(u_0)$ endlich ist, dann explodiert $|u(t)|_2$ für $t \rightarrow \bar{t}(u_0)$. Für $r \geq |u_0|_2$ findet man übrigens eine untere Schranke $\bar{t}(u_0) > \tau(r) > 0$, die nur von f und r abhängt, siehe Bemerkung 2.2.3 in [7]. Teil d) liefert schließlich die *stetige Abhängigkeit vom Anfangswert*: Für jede gegebene Endzeit $b \in (0, \bar{t}(u_0))$ gibt es eine Kugel $\bar{B}(u_0, \delta(b, u_0))$, auf der $v_0 \mapsto u(t; v_0)$ Lipschitz stetig ist (gleichmäßig in $t \in [0, b]$); insbesondere ist $\bar{t}(v_0) > b$.

Im Beweis löst man statt (5.6) die Integralgleichung (5.10) mittels des Banachschen Fixpunktsatzes auf einer geeigneten Teilmenge eines Banachraumes von Funktionen. Da wir den Beweis nur im Falle einer globalen Lipschitzbedingung in x führen, können wir als Teilmenge tatsächlich den ganzen Raum wählen. (In Analysis 4 beweisen wir eine allgemeinere Version des Theorems zur Gänze, siehe auch die Sätze 2.2.2, 2.3.2. und 4.1.2 in [7].)

THEOREM 5.7. *Seien $f \in C(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ lokal Lipschitz in x und $u_0 \in \mathbb{R}^m$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) *Es gibt genau eine maximale Lösung $u = u(\cdot; u_0)$ von (5.6) auf $[0, \bar{t}(u_0))$ mit der maximalen Existenzzeit*

$$\bar{t}(u_0) := \sup\{\tau > 0 \mid \exists \text{ Lösung } u_\tau \text{ von (5.6) auf } [0, \tau]\}.$$

b) *Es gebe zwei Lösungen v_1 und v_2 von (5.6) auf Zeitintervallen J_1 bzw. J_2 mit $\min J_i = 0$. Dann ist $v_1(t) = v_2(t)$ für alle $t \in J_1 \cap J_2$.*

c) *Sei $\bar{t}(u_0) < \infty$. Dann folgt $|u(t)|_2 \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \bar{t}(u_0)$.*

d) *Sei $b \in (0, \bar{t}(u_0))$. Dann gibt es solche Konstanten $\delta = \delta(b, u_0) > 0$ und $c = c(b, u_0) \geq 0$, dass für alle Anfangswerte $v_0, w_0 \in \bar{B}(u_0, \delta)$ und $t \in [0, b]$ die Ungleichungen $\bar{t}(v_0), \bar{t}(w_0) > b$ und*

$$|w(t) - v(t)|_2 \leq c |w_0 - v_0|_2$$

gelten, wobei $v = u(\cdot; v_0)$ und $w = u(\cdot; w_0)$ die maximalen Lösungen sind.

BEWEIS. Wir führen den Beweis nur unter der globalen Lipschitzbedingung, dass für ein $L > 0$ die Aussage

$$\forall t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}^m : |f(t, x) - f(t, y)|_2 \leq L |x - y|_2 \quad (5.11)$$

erfüllt ist. Weiter gebe es $C, \alpha \geq 0$ mit $|f(t, 0)|_2 \leq Ce^{\alpha t}$ für alle $t \geq 0$. Es sei $u_0 \in \mathbb{R}^m$. Unter diesen Bedingungen lösen wir (5.6) auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Nach Lemma 5.6 reicht es eine stetige Lösung u der Integralgleichung (5.10) zu finden. Für stetige $v : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ definieren wir deswegen die Funktion

$$\Phi v : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m; \quad \Phi v(t) = (\Phi v)(t) = (\Phi_{u_0}(v))(t) := u_0 + \int_0^t f(s, v(s)) \, ds.$$

Wie im Beweis von Lemma 5.6 sehen wir, dass Φv stetig ist, also $\Phi : C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m) \rightarrow C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m)$ eine Abbildung ist. Um den Banachschen Fixpunktsatz 2.40 anzuwenden, müssen wir einen vollständigen metrischen Raum $E \subseteq C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m)$ finden, auf dem die Einschränkung $\Phi|_E$ eine strikte Kontraktion ist.

1) Zuerst beschreiben wir die Grundidee. Seien $b > 0$, $t \in [0, b]$ und $u, v \in C([0, b], \mathbb{R}^m)$. Dieser Raum ist vollständig mit der Norm $\|v\|_{\infty, b} = \max_{0 \leq t \leq b} |v(t)|_2$. Die Eigenschaften des Integrals und Bedingung (5.11) liefern die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\Phi u(t) - \Phi v(t)|_2 &= \left| \int_0^t [f(s, u(s)) - f(s, v(s))] ds \right|_2 \leq \int_0^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))|_2 ds \\ &\leq L \int_0^t |u(s) - v(s)|_2 ds \leq bL \|u - v\|_{\infty, b}. \end{aligned}$$

Wenn man $b =: \beta$ in $(0, 1/(2L)]$ wählt, folgt die strikte Kontraktivität

$$\|\Phi u - \Phi v\|_{\infty, \beta} \leq \frac{1}{2} \|u - v\|_{\infty, \beta}. \quad (5.12)$$

Dies liefert eine Lösung auf dem (u.U. kleinen) Zeitintervall $[0, \beta]$. Man könnte das Argument nun iterieren, um eine globale Lösung zu erhalten. Wir wollen hier aber mit einem ‘Trick’ die Lösung auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ in einem Schritt gewinnen.

2) Dazu setzen wir $\omega = \max\{2L, \alpha\} > 0$ und

$$\|v\| = \sup_{t \geq 0} e^{-\omega t} |v(t)|_2$$

für $v \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m)$. Wie in einer Übung zeigt man die Vollständigkeit des Raumes

$$E = \{v \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m) \mid \|v\| < \infty\}$$

bezüglich der Norm $\|\cdot\|$. Man beachte, dass E exponentiell wachsende Funktionen enthält. Man kann dieses exponentielle Gewicht in die obige Rechnung einbauen und sie dabei auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ausdehnen. Seien $u, v \in E$ und $t \geq 0$.

Zuerst müssen wir $\|\Phi v\| < \infty$ nachweisen. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} e^{-\omega t} |\Phi v(t)|_2 &\leq e^{-\omega t} |u_0|_2 + e^{-\omega t} \left| \int_0^t (f(s, v(s)) - f(s, 0) + f(s, 0)) ds \right|_2 \\ &\leq |u_0|_2 + \int_0^t e^{-\omega(t-s)} (Le^{-\omega s} |v(s) - 0|_2 + Ce^{-\omega s} e^{\alpha s}) ds \\ &\leq |u_0|_2 + (L\|v\| + C) \int_0^t e^{\omega(s-t)} ds = |u_0|_2 + (L\|v\| + C) \frac{1}{\omega} e^{\omega(s-t)} \Big|_{s=0}^t \\ &\leq |u_0|_2 + (L\|v\| + C)\omega^{-1}, \end{aligned}$$

wobei (5.11), $|f(s, 0)|_2 \leq Ce^{\alpha s}$ und $\omega \geq \alpha$ eingehen. Also liegt Φv in E .

Für die Kontraktivität verwenden wir $\omega \geq 2L$ und gehen ähnlich vor:

$$\begin{aligned} e^{-\omega t} |\Phi u(t) - \Phi v(t)|_2 &= e^{-\omega t} \left| \int_0^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) ds \right|_2 \\ &\leq \int_0^t e^{-\omega(t-s)} Le^{-\omega s} |u(s) - v(s)|_2 ds \end{aligned}$$

$$\leq L \|u - v\| \frac{1}{\omega} e^{\omega(s-t)} \Big|_{s=0}^t \leq \frac{1}{2} \|u - v\|.$$

Mit $\sup_t$ ergibt sich

$$\|\Phi u - \Phi v\| \leq \frac{1}{2} \|u - v\|. \quad (5.13)$$

Theorem 2.40 liefert nun genau eine Funktion u in E mit $u = \Phi u$. Laut Lemma 5.6 löst u das Anfangswertproblem (5.6) auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

3) In Schritt 2) zeigt der Banachsche Fixpunktsatz die Eindeutigkeit nur in E , was eine unnötige und unangenehme Einschränkung ist. Seien v_1 und v_2 wie in Behauptung b). Falls β aus Teil 1) größer als $\tau := \min\{\sup J_1, \sup J_2\} \in (0, \infty]$ sein sollte, ersetzen wir es durch τ . Lemma 5.6 zeigt, dass $v_1 = \Phi v_1$ und $v_2 = \Phi v_2$ gelten. Abschätzung (5.12) impliziert dann

$$\|v_1 - v_2\|_{\infty, \beta} = \|\Phi v_1 - \Phi v_2\|_{\infty, \beta} \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_{\infty, \beta}.$$

Somit muss $\|v_1 - v_2\|_{\infty, \beta} = 0$ sein, sodass v_1 und v_2 auf $[0, \beta]$ übereinstimmen. Wenn $\beta > \tau$ sein sollte, kann man wegen $v_1(\beta) = v_2(\beta)$ das Argument wiederholen. Iterativ erhalten wir $v_1 = v_2$ auf $J_1 \cap J_2$. Insbesondere ist u die einzige Lösung von (5.6) auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

4) Für die stetige Abhängigkeit sei $v \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m)$ die Lösung von (5.6) zum Anfangswert v_0 . Es gilt also $v = \Phi_{v_0} v$. Ferner haben wir die obige Lösung $u = \Phi_{u_0} u$.⁹ Man beachte, dass $\Phi_{u_0} v(t) - \Phi_{v_0} v(t) = u_0 - v_0$ für alle $t \geq 0$ ist. Aus der Ungleichung (5.13) folgt dann

$$\begin{aligned} \|u - v\| &= \|\Phi_{u_0} u - \Phi_{v_0} v\| \leq \|\Phi_{u_0} u - \Phi_{u_0} v\| + \|\Phi_{u_0} v - \Phi_{v_0} v\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|u - v\| + \sup_{t \geq 0} e^{-\omega t} |u_0 - v_0|_2, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \|u - v\| \leq |u_0 - v_0|_2.$$

Sei $b > 0$ gegeben. Für $t \in [0, b]$ schließen wir aus der obigen Abschätzung sogar die (in u_0) globale Lipschitz Stetigkeit von $u_0 \mapsto u(t; u_0)$ durch

$$|u(t) - v(t)|_2 = e^{\omega t} e^{-\omega t} |u(t) - v(t)|_2 \leq e^{\omega b} \|u - v\| \leq 2e^{\omega b} |u_0 - v_0|_2. \quad \square$$

Wenn man in Theorem 5.7 die lokale Lipschitzbedingung weglässt, erhält man noch die Existenz einer Lösung, aber nicht notwendig ihre Eindeutigkeit (wie das Problem (5.3) zeigt). Dies ist die Aussage des Existenzsatzes von Peano, siehe etwa Satz 6.1.1 in [7].

Wir zeigen nun die einfachste Version der *Gronwallschen Ungleichung*, die ein zentrales Hilfsmittel bei der Untersuchung von Differentialgleichungen ist. Wenn man im Kontext der Integralgleichung (5.10) eine Abschätzung vornimmt, erhält man oft die Norm der linken Seite (oder Varianten davon) rechts als Integranden. Hier kann Gronwall entscheidend weiterhelfen.

⁹Im allgemeinen Fall muss man in Behauptung d) eine weitere Lösung w heranziehen, da u_0 als Mittelpunkt der Kugel in d) fixiert ist.

SATZ 5.8. Seien J ein Intervall, $\varphi \in C(J)$, $t_0 \in J$ und $a, b \geq 0$. Es gelte

$$0 \leq \varphi(t) \leq a + b \int_{t_0}^t \varphi(s) \, ds \quad \text{für alle } t \in J.$$

Dann erhalten wir die Ungleichung

$$\varphi(t) \leq ae^{b(t-t_0)} \quad \text{für alle } t \in J.$$

Insbesondere ergibt sich $\varphi = 0$, wenn $a = 0$ ist.

BEWEIS. Sei $t \in J$. Wir setzen

$$\psi(t) = b \int_{t_0}^t \varphi(s) \, ds,$$

sodass $\psi(t_0) = 0$ ist. Also gilt $\varphi(t) \leq a + \psi(t)$ und damit $\psi'(t) = b\varphi(t) \leq ab + b\psi(t)$. Für $s \in [t_0, t]$ (wenn $t \geq t_0$) bzw. $s \in [t, t_0]$ (wenn $t < t_0$) folgt daraus die Abschätzung

$$\frac{d}{ds}(e^{-b(s-t_0)}\psi(s)) = -be^{-b(s-t_0)}\psi(s) + e^{-b(s-t_0)}\psi'(s) \leq abe^{-b(s-t_0)}.$$

Der Hauptsatz (3.5) liefert dann

$$\begin{aligned} e^{-b(t-t_0)}\psi(t) - \psi(t_0) &= \int_{t_0}^t \frac{d}{ds}(e^{-b(s-t_0)}\psi(s)) \, ds \leq \int_{t_0}^t abe^{-b(s-t_0)} \, ds = a(1 - e^{-b(t-t_0)}), \\ \psi(t) &\leq ae^{b(t-t_0)} - a, \end{aligned}$$

woraus sich die gewünschte Ungleichung $\varphi(t) \leq a + \psi(t) \leq ae^{b(t-t_0)}$ ergibt. $\square$

Man beweist $\bar{t}(u_0) = \infty$ typischerweise indirekt. Dazu nimmt man an, es gälte $\bar{t}(u_0) < \infty$ und versucht dann zu zeigen, dass die Blowup Bedingung in Theorem 5.7 c) nicht eintritt und somit ein Widerspruch vorliegt. Hierfür muss man sicherstellen, dass die Lösung auf $[0, \bar{t}(u_0))$ beschränkt bleibt. Dies soll aus Bedingungen an f und u_0 (und nicht an u) folgen, da nur f und u_0 gegeben sind. Schranken der Lösung liefert der folgende wichtige Satz, bei dem eine Invarianzaussage verwendet werden kann. Diese Fragestellung wird in Analysis 4 vertieft.

SATZ 5.9. Seien $f \in C(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ lokal Lipschitz in x und $M \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen (z.B. $M = \mathbb{R}^m$ oder $M = (\mathbb{R}_{\geq 0})^m$). Sei u die maximale Lösung von (5.6) auf $[0, \bar{t}(u_0))$ und es gelte $u(t) \in M$ für alle $0 \leq t < \bar{t}(u_0)$.

a) Weiter existiere für jedes $b > 0$ eine Konstante $c(b) \geq 0$ mit

$$\forall t \in [0, b], \, x \in M : \quad (f(t, x)|x) \leq c(b) (1 + |x|_2^2). \quad (5.14)$$

Dann gilt $\bar{t}(u_0) = \infty$.

b) Sei speziell $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ und es gebe eine Konstante $c \geq 0$ mit

$$\forall x \in M : \quad (f(x)|x) \leq c (1 + |x|_2^2). \quad (5.15)$$

Dann gilt $\bar{t}(u_0) = \infty$.

BEWEIS. Die Aussage b) folgt direkt aus a). Es gelte (5.14). Wir nehmen an, es wäre $\bar{t}(u_0) < \infty$. Seien $0 \leq s \leq t < \bar{t}(u_0) =: b$. Die Produktregel, die Differentialgleichung (5.6) und die Voraussetzung (5.14) implizieren

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} |u(s)|_2^2 &= \frac{d}{ds} (u(s)|u(s)) = (u'(s)|u(s)) + (u(s)|u'(s)) \\ &= 2(f(s, u(s)) | u(s)) \leq 2c(b) (1 + |u(s)|_2^2). \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass $u(s)$ nach Voraussetzung in M liegt. Wir integrieren nun von 0 nach t und erhalten mit der Anfangsbedingung und dem Hauptsatz (3.5) die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |u(t)|_2^2 - |u_0|_2^2 &= \int_0^t \frac{d}{ds} |u(s)|_2^2 ds \leq \int_0^t 2c(b) (1 + |u(s)|_2^2) ds, \\ |u(t)|_2^2 &\leq |u_0|_2^2 + 2c(b)b + 2c(b) \int_0^t |u(s)|_2^2 ds. \end{aligned}$$

Der Gronwallsche Satz 5.8 zeigt nun die Abschätzung

$$|u(t)|_2^2 \leq (|u_0|_2^2 + 2c(b)b)e^{2c(b)t} \leq (|u_0|_2^2 + 2c(b)b)e^{2c(b)b} \quad \text{für alle } t < \bar{t}(u_0).$$

Diese Aussage widerspricht Theorem 5.7 c), sodass $\bar{t}(u_0) = \infty$ ist. $\square$

Wir haben oben das Quadrat der 2-Norm der Lösung nach t abgeleitet und dann die Differentialgleichung, eine Voraussetzung an f und die Gronwallsche Ungleichung angewendet. Dieses Vorgehen ist typisch für die Theorie der (auch partiellen) Differentialgleichungen. Man nennt es gerne *Energieabschätzung*, da das Quadrat der 2-Norm oft (bis auf Konstanten) einer Energie entspricht.

Wenn $\bar{t}(u_0) = \infty$ für jedes $u_0 \in \mathbb{R}^m$ gilt, so bezeichnet man (5.6) als *global lösbar*. In (5.2) haben wir $\bar{t}(u_0) < \infty$ für alle $u_0 \in \mathbb{R}_+$; hier verletzt $f(x)x = x^3$ die Bedingung (5.15) für $x \in \mathbb{R}_+$.

Wir formulieren einfache notwendige Bedingungen für (5.14) und (5.15).¹⁰

BEMERKUNG 5.10. In der Situation von Satz 5.9 folgt die Bedingung (5.14) aus der Eigenschaft

$$\forall b > 0 \quad \exists \tilde{c}(b) \geq 0 \quad \forall t \in [0, b], \quad x \in M : \quad |f(t, x)|_2 \leq \tilde{c}(b)(1 + |x|_2), \quad (5.16)$$

und (5.15) folgt aus

$$\exists \tilde{c} > 0 \quad \forall x \in M : \quad |f(x)|_2 \leq \tilde{c}(1 + |x|_2). \quad (5.17)$$

Für $|x|_2 \rightarrow \infty$ liegt hier eine *lineare Wachstumsschranke* vor, während (5.14) und (5.15) nur eine *halbseitige lineare Wachstumsschranke* fordern. (Genauer sind (5.14) und (5.15) Schranken in radialer Richtung nach außen, da $x/|x|_2$ der äußere Einheits-Normalenvektor auf $S(0, |x|_2)$ ist.) Für x in einer kompakten Menge gelten (5.16) bzw. (5.17) wegen des Summanden 1 nach dem Satz vom Maximum automatisch.

¹⁰In der Vorlesung war diese Bemerkung nur implizit enthalten.

BEWEIS. Für $t \in [0, b]$ folgt mit der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung und (5.16) die gewünschte Abschätzung

$$(f(t, x)|x) \leq |f(t, x)|_2 |x|_2 \leq \tilde{c}(b)(|x|_2 + |x|_2^2) \leq \frac{3}{2}\tilde{c}(b)(1 + |x|_2^2).$$

Man beachte, wie man mit dem Summanden 1 auftretende Störterme absorbiert. $\square$

Ein wichtiger Anwendungsfall der obigen Abschätzung sind die nachfolgend behandelten *inhomogenen linearen Systeme*.

BEISPIEL 5.11. Seien $A \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, L(\mathbb{R}^m))$, $g \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m)$ und $u_0 \in \mathbb{R}^m$. Dann hat das Problem

$$u'(t) = A(t)u(t) + g(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0, \quad (5.18)$$

genau eine Lösung u auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

BEWEIS. Wir setzen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$; $f(t, x) = A(t)x + g(t)$. Diese stetige Funktion hat in x eine stetige Ableitung, sodass sie nach Bemerkung 5.5 lokal Lipschitz in x ist. Es sei $b > 0$. Dann wird $|f(t, x)|_2$ für $t \in [0, b]$ durch die Zahl $\tilde{c}(b) := \max_{t \in [0, b]} \{\|A(t)\|, |g(t)|_2\}$ beschränkt. Damit folgt die Behauptung aus Theorem 5.7 und Bemerkung 5.10 $\square$

In den folgenden Beispielen sehen wir, dass die Bedingung (5.15) (aber nicht (5.17)) auch polynomial wachsende f mit ‘richtigem Vorzeichen’ zulässt.

BEISPIEL 5.12. Sei $f(x) = -x^3$ für $x \in \mathbb{R}$. Hier gilt (5.15), da $f(x)x = -x^4 \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Nach Theorem 5.7 und Satz 5.9 hat also das Problem

$$u'(t) = -u(t)^3, \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0,$$

für jedes $u_0 \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Mittels Satz 1.31 erhalten wir im übrigen $u(t) = \pm(2t + u_0^{-2})^{-\frac{1}{2}}$ für $t \geq 0$ und $u_0 \gtrless 0$. (Es gilt $u = 0$ für $u_0 = 0$.) $\diamond$

BEISPIEL 5.13. Die Pendelgleichung (5.5) in Beispiel 5.2 können wir laut Bemerkung 5.3 als $w'(t) = f(w(t))$ mit $w = (u, u')$ und $f(x, y) = (y, -\frac{\gamma}{l} \sin x - \frac{1}{lm}r(y))$ für $x, y \in \mathbb{R}$ schreiben. Hier sind $\gamma, l, m > 0$, und es gilt $-yr(y) \leq 0$. Damit und der Youngschen Ungleichung berechnen wir

$$(f(x, y)|(x, y)) = xy - \frac{\gamma}{l}y \sin x - \frac{1}{lm}yr(y) \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\gamma}{2l}(1 + y^2) \leq \frac{1}{2}(1 + \frac{\gamma}{l})|z|_2^2.$$

für alle $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Theorem 5.7, Satz 5.9 und Bemerkung 5.3 liefern somit für alle $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige Lösung u auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ von (5.5).

Wenn die Zustände $u(t)$ Stoffmengen beschreiben, müssen diese nichtnegativ sein. Für diese Eigenschaft liefert der folgende Satz ein einfach zu überprüfendes Kriterium an f (wobei man natürlich annehmen kann, dass der Anfangswert nichtnegativ ist). Wir erinnern daran, dass ein Vektor $x \in \mathbb{R}^m$ nichtnegativ (positiv) heißt, wenn $x_k \geq 0$ ($x_k > 0$) für alle $k \in \{1, \dots, m\}$ gilt. Wir schreiben dann $x \geq 0$ bzw. $x > 0$. Analoge Begriffe verwenden wir für vektorwertige Funktionen. Weiter sind $\mathbb{R}_{\geq 0}^m := (\mathbb{R}_{\geq 0})^m$ bzw. $\mathbb{R}_+^m := (\mathbb{R}_+)^m$ die Mengen dieser Vektoren.

SATZ 5.14. Sei $f \in C(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ lokal Lipschitz in x und erfülle das Positivitätskriterium:

$$\forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m \text{ mit } x_k = 0 \text{ für ein } k \in \{1, \dots, m\} \text{ gilt } f_k(x) \geq 0. \quad (5.19)$$

Ferner seien $u_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ und u die maximale Lösung von (5.6). Dann erhalten wir $u(t) \geq 0$ für alle $t \in [0, \bar{t}(u_0))$.

BEWEIS. Wir zeigen den Satz nur im (einfacheren) Spezialfall, dass $u_0 > 0$ ist und $f_k(t, x) > 0$ in (5.19) gilt. In dieser Situation erhalten wir sogar $u(t) > 0$ für alle $t \in [0, \bar{t}(u_0))$.¹¹ Diese Aussage beweisen wir indirekt. Sie sei also für einen Anfangsvektor $u_0 \in \mathbb{R}_+^m$ mit maximaler Lösung u falsch. Dann gibt solche Zahlen $t_1 \in (0, \bar{t}(u_0))$ und $k \in \{1, \dots, m\}$, dass für alle Zeiten $t \in [0, t_1)$ die Ungleichung $u(t) > 0$ gilt und $u_k(t_1) = 0$ ist. Es folgt $u(t_1) \geq 0$. Die Differentialgleichung (5.6) und die Bedingung (5.19) implizieren nun den Widerspruch

$$0 \geq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} (u_k(t_1 + h) - u_k(t_1)) = u'_k(t_1) = f_k(t_1, u(t_1)) > 0. \quad \square$$

Die Bedingung (5.19) bedeutet, dass der Vektor $f(t, x)$ bei einem Punkt $x \in \partial \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ nicht aus $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ herausweist. Diese Beobachtung macht den obigen Satz plausibel, da $f(t, u(t))$ die Tangentenrichtung einer Lösung zur Zeit t ist. Es sei betont, dass (5.19) bei der Pendelgleichung in Beispiel 5.2 nicht gilt. Bei Schwingungsproblemen treten freilich ganz natürlich Vorzeichenwechsel auf. Wir wenden das Positivitätskriterium nun auf Populationsmodelle an. Im zweiten Beispiel nutzen wir die Nichtnegativität auch aus, um mit Satz 5.9 globale Existenz zu zeigen.

BEISPIEL 5.15. a) Im Räuber-Beute-Modell (5.4) haben wir $f_1(x, y) = ax - bx^2 - rxy$ und $f_2(x, y) = -cy + sxy$ für feste $a, c, r, s > 0$ und $b \geq 0$. Es sei $(u_0, v_0) \geq 0$. Hier liegt f in $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ und es gelten $f_1(0, y) = 0$ und $f_2(x, 0) = 0$ für alle $x, y \geq 0$, sodass (5.19) gilt. Also hat (5.4) nach Theorem 5.7 und Satz 5.14 genau eine maximale Lösung $(u, v) \geq 0$. (In Analysis 4 zeigen wir auch die globale Existenz dieser Lösungen.)

b) Im Konkurrenzmodell

$$\begin{aligned} u'(t) &= au(t) - bu(t)^2 - ru(t)v(t), & t \geq 0, \\ v'(t) &= cv(t) - dv(t)^2 - su(t)v(t), & t \geq 0, \\ u(t_0) &= u_0, \quad v(0) = v_0, \end{aligned} \quad (5.20)$$

mit Konstanten $a, c, s, r > 0$ und $b, d \geq 0$ gibt es für jeden Anfangswert $(u_0, v_0) \geq 0$ genau eine Lösung (u, v) , die für alle $t \in [0, \infty)$ existiert und nichtnegativ ist.

BEWEIS. Zuerst bemerken wir, dass die rechte Seite f in $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ liegt, sodass Theorem 5.7 genau eine maximale Lösung liefert. Ihre Nichtnegativität zeigt man

¹¹Die eigentliche Aussage folgt aus dem hier Gezeigten mittels eines Approximationsarguments, siehe Satz 4.2.2 in [7] oder Analysis 4.

wie in Teil a). Damit können wir in Satz 5.9 die Menge $M = \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ verwenden. Für $(x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ gilt nun

$$(f(x, y)|(x, y)) = ax^2 - bx^3 - rx^2y + cy^2 - dy^3 - sxy^2 \leq ax^2 + cy^2 \leq \max\{a, c\} |(x, y)|_2^2$$

Satz 5.9 liefert dann die globale Existenz für jeden Anfangswert $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$. $\square$

5.3. Lineare Probleme

Gegeben seien $A \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, L(\mathbb{R}^m))$, $g \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m)$, $u_0 \in \mathbb{R}^m$ und $t_0 \geq 0$. Wir suchen *Lösungen* $u \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m)$ des *linearen* Problems

$$u'(t) = A(t)u(t) + g(t), \quad t \geq 0, \quad u(t_0) = u_0, \quad (5.21)$$

auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Man beachte, dass die Funktionen A und g unbeschränkt sein können. Das Problem (5.21) heißt *autonom*, wenn $A(t) = A(0)$ für alle $t \geq 0$ gilt, und *homogen*, wenn $g = 0$ ist. In (5.21) hängt also die zeitliche Änderung des Zustandes affin vom aktuellen Zustand ab.

BEMERKUNG 5.16. Das Problem (5.21) ist auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ eindeutig lösbar. Um diese Aussage auf Beispiel 5.11 zurückzuführen, verschieben wir zuerst die Koeffizienten zu $\hat{A}(\tau) = A(\tau + t_0)$ und $\hat{g}(\tau) = g(\tau + t_0)$ für $\tau \geq 0$. Das Problem (5.18) für $\hat{A}$, $\hat{g}$ und u_0 hat auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ genau eine Lösung $\tilde{u}$ laut Beispiel 5.11. Dann löst $u_+(t) = \tilde{u}(t - t_0)$ das Problem (5.21) auf $[t_0, \infty)$.

Falls $t_0 > 0$ betrachten wir analog $\hat{A}(\tau) = -A(t_0 - \tau)$ und $\hat{g}(\tau) = -g(t_0 - \tau)$ für $\tau \in [0, t_0]$. Hier erhält man wie in Beispiel 5.11 eine eindeutige Lösung $\hat{u}$ des modifizierten Problems auf $[0, t_0]$. Man sieht leicht, dass dann $u_-(t) = \hat{u}(t_0 - t)$ das Problem (5.21) auf $[0, t_0]$ löst. Nun gelten $u_{\pm}(t_0) = u_0$ und $u'_{\pm}(t_0) = A(t_0)u_0 + g(t_0)$, so dass man mit $u(t) = u_{\pm}(t)$ für $t \gtrless t_0$ und $u(t_0) = u_0$ eine Lösung in $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ von (5.21) definiert.

Sei v eine weitere Lösung von (5.21) auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann lösen $\tilde{v}(\tau) = v(\tau + t_0)$ bzw. $\hat{v}(\tau) = v(t_0 - \tau)$ die obigen Hilfsprobleme auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ bzw. $[0, t_0]$. Sie sind folglich gleich $\tilde{u}$ bzw. $\hat{u}$, und damit ist $v = u$. $\diamond$

Wir erinnern an Beispiel 1.32 b). Für $m = 1$ und $g = 0$ wird (5.21) durch

$$u : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}; \quad u(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau\right) u_0,$$

gelöst, wobei hier $A(t) \in \mathbb{R}$ ist. Für $m \geq 2$ ist diese Formel im allgemeinen falsch (außer wenn die Matrizen $A(t)$, $t \geq 0$, alle kommutieren), siehe die Übungen. Tatsächlich erhält man bei nichtautonomen linearen Systemen nur in Ausnahmefällen explizite Lösungsformeln. In der autonomen Situation werden wir aber unten einen Weg angeben, mit dem man die Lösung (oft) explizit berechnen kann. Außerdem kann man in diesem Fall das Langzeitverhalten der Lösungen mittels Eigenschaften von A untersuchen, vergleiche Theorem 5.26. Die Resultate helfen auch bei der Behandlung nichtlinearer Probleme in Theorem 5.28.

Wir diskutieren zunächst einige grundlegende Eigenschaften linearer Differentialgleichungen, wobei wir die Sprache der linearen Algebra verwenden. Für ein gegebenes $g \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m)$ ist

$$L_g = \left\{ u \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m) \mid \forall t \geq 0 : u'(t) = A(t)u(t) + g(t) \right\}$$

der Lösungsraum von (5.21). Eine Funktion $u \in L_g$ erfüllt also (5.21) mit dem Anfangswert $u_0 := u(t_0)$.

LEMMA 5.17. Seien $A \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, L(\mathbb{R}^m))$ und $g = 0$. Dann ist L_0 ein m -dimensionaler Untervektorraum von $C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m)$, und die Abbildung $S(t_0) : L_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$; $S(t_0)u = u(t_0)$, ist bijektiv und linear.

BEWEIS. Es seien u und v die Lösungen der Differentialgleichung in (5.21) mit $g = 0$. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Linearkombination $w = \alpha u + \beta v$ in $C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m)$. Dann liefern (5.21) und die Linearität von $A(t)$ die Gleichung

$$w'(t) = \alpha u'(t) + \beta v'(t) = \alpha A(t)u(t) + \beta A(t)v(t) = A(t)w(t)$$

für alle $t \geq 0$. Somit ist L_0 ein Untervektorraum. Weiter gilt offenbar

$$S(t_0)(\alpha u + \beta v) = \alpha u(t_0) + \beta v(t_0) = \alpha S(t_0)u + \beta S(t_0)v,$$

sodass $S(t_0)$ linear ist. Die behauptete Bijektivität folgt aus der eindeutigen Lösbarkeit von (5.21) für jedes $u_0 \in \mathbb{R}^m$ und $g = 0$. Nach Korollar 2 in Abschnitt 2.2.4 von [3] haben dann $\mathbb{R}^m$ und L_0 die gleiche Dimension. $\square$

Wir suchen nun eine Basis von L_0 , also m linear unabhängige Lösungen $y_1, \dots, y_m \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m)$ der homogenen Differentialgleichung

$$u'(t) = A(t)u(t), \quad t \geq 0. \quad (5.22)$$

Dazu benötigen wir Ableitungen von matrizenwertigen Funktionen $M : J \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$, wobei J ein Intervall sei. Falls J offen ist, sieht man wie in Bemerkung 3.8 c), dass M bei $t \in J$ genau dann differenzierbar ist, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (M(t+h) - M(t)) =: D(t) \quad \text{in } L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$$

existiert, und dann ist $D(t) = M'(t)$. (Hier verwendet man die Äquivalenz der Konvergenz in $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ mit der komponentenweisen, siehe Beispiel 2.38.) Die obige Definition lässt sich wie bei Kurven auf nicht-offene J (z.B. $\mathbb{R}_{\geq 0}$) ausdehnen.

Wenn auch $N : J \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ bei $t \in J$ differenzierbar ist, liefert die Produktregel Satz 3.12 (bzw. ein Vorgehen wie in Analysis 1) die Aussage

$$\exists (MN)'(t) = M'(t)N(t) + M(t)N'(t), \quad t \in J.$$

Wir können nun leicht Basen von L_0 charakterisieren.

LEMMA 5.18. Seien $A \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, L(\mathbb{R}^m))$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

a) Funktionen $y_1, \dots, y_m : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ liegen genau dann in $C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m)$ und lösen (5.22) auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, wenn die matrizenwertige Funktion $Y = [y_1 \ \cdots \ y_m]$ in $C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, L(\mathbb{R}^m))$ liegt und die Matrizendifferentialgleichung

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad t \geq 0, \quad (5.23)$$

auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ löst.

b) Seien $y, \dots, y_m$ Lösungen von (5.22). Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

- 1) $\{y_1, \dots, y_m\}$ ist linear unabhängig in $C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m)$.
- 2) $\{y_1(t_0), \dots, y_m(t_0)\}$ ist linear unabhängig in $\mathbb{R}^m$ für ein $t_0 \geq 0$.
- 3) $\{y_1(t_0), \dots, y_m(t_0)\}$ ist linear unabhängig in $\mathbb{R}^m$ für alle $t_0 \geq 0$.
- 4) $Y(t_0)$ ist invertierbar für ein $t_0 \geq 0$.
- 5) $Y(t_0)$ ist invertierbar für alle $t_0 \geq 0$.
- 6) $\det Y(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \geq 0$.
- 7) $\det Y(t_0) \neq 0$ für alle $t_0 \geq 0$.

c) Wenn $y_1, \dots, y_m$ die Gleichung (5.22) auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ erfüllen, dann löst die Wronski-Determinante $\varphi(t) = \det Y(t)$ die Differentialgleichung

$$\varphi'(t) = \text{sp}(A(t))\varphi(t), \quad t \geq 0,$$

wobei sp die Spur bezeichnet. Also gilt

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_s^t \text{sp}(A(\tau)) \, d\tau\right) \varphi(s) \quad \text{für alle } t, s \geq 0.$$

BEWEIS. a) Wie nehmen an, dass die Funktionen $y_1, \dots, y_m \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m)$ die Gleichung (5.22) auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ lösen. Nach der Vorbemerkung liegt dann die Abbildung $Y = [y_1 \ \cdots \ y_m]$ in $C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, L(\mathbb{R}^m))$ und erfüllt

$$Y'(t) = [y_1'(t) \ \cdots \ y_m'(t)] = [A(t)y_1(t) \ \cdots \ A(t)y_m(t)] = A(t)Y(t)$$

für $t \geq 0$, wobei wir (5.22) und die Regeln der Matrizenmultiplikation verwenden. Die Umkehrung in Teil a) zeigt man entsprechend.

b) Die Implikationen '1) $\Rightarrow$ 3)' und '2) $\Rightarrow$ 1)' folgen aus der Isomorphie von $S(t_0)$ gemäß Lemma 5.17, während '3) $\Rightarrow$ 2)' wie auch '7) $\Rightarrow$ 6)' klar sind. Ferner liefert die lineare Algebra die Folgerungen '3) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 7)' und '6) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 2)', siehe etwa Bemerkung 2 in Abschnitt 2.5.6 und Satz 3.1.3 aus [3].

c) Für den Beweis der letzten (hier nicht benötigten) Aussage verweisen wir auf Lemma 3.1.2 in [7]. $\square$

Die obigen Beobachtungen führen auf die folgenden Begriffe, von denen für uns der dritte der wichtigste ist.

DEFINITION 5.19. Die Funktion $Y \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, L(\mathbb{R}^m))$ löse (5.23) und die Matrizen $Y(t)$ seien für alle $t \geq 0$ invertierbar. Dann ist Y die Fundamentallösung

von (5.21). Wenn zusätzlich $Y(t_0) = I$ für ein $t_0 \geq 0$ ist, so heißt Y die Hauptfundamentallösung bei t_0 . Wenn Y eine Fundamentallösung ist, dann nennen wir $U(t, t_0) := Y(t)Y(t_0)^{-1}$ für $t, t_0 \geq 0$ die Lösungsoperatoren von (5.21).

Wir können nun die Lösung des inhomogenen Problems (5.21) mittels der Lösungsoperatoren ausdrücken. Die Duhamelsche Formel ist für die weitere Theorie von grundlegender Bedeutung, siehe etwa den Beweis von Theorem 5.28.

SATZ 5.20. Seien $A \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, L(\mathbb{R}^m))$, $g \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m)$, $t_0 \geq 0$ und $u_0 \in \mathbb{R}^m$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

a) Wenn man linear unabhängige Anfangswerte $u_0^1, \dots, u_0^m \in \mathbb{R}^m$ wählt, dann bilden die Lösungen $y_1, \dots, y_m$ von (5.21) mit $g = 0$ und $y_j(t_0) = u_0^j$ für $j \in \{1, \dots, m\}$ eine Fundamentallösung $Y = [y_1 \ \dots \ y_m]$. Diese ist genau dann eine Hauptfundamentallösung für t_0 , wenn $u_0^j = e_j$ für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$ ist. Es gibt genau eine Hauptfundamentallösung zu t_0 .

b) Der Lösungsoperator $U(t, s)$ ist für festes $s \geq 0$ die Hauptfundamentallösung; d.h., die Gleichungen $U(s, s) = I$ und $\frac{\partial}{\partial t} U(t, s) = A(t)U(t, s)$ gelten für alle $t, s \geq 0$. Ferner ist $U(t, r)U(r, s) = U(t, s)$ für alle $t, r, s \geq 0$.

c) Die Lösung von (5.21) ist durch die Duhamelsche Formel

$$\begin{aligned} u(t) &= U(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^t U(t, s)g(s) \, ds \\ &= Y(t) \left(Y(t_0)^{-1}u_0 + \int_{t_0}^t Y(s)^{-1}g(s) \, ds \right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

für alle $t \geq 0$ gegeben. Also ist der Lösungsraum L_g ein m -dimensionaler affiner Teilraum von $C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m)$.

BEWEIS. a) Behauptung a) folgt aus Lemma 5.17.

b) Teil a), die Produktregel und die Differentialgleichung (5.23) implizieren

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, s) = \frac{\partial}{\partial t} (Y(t)Y(s)^{-1}) = Y'(t)Y(s)^{-1} = A(t)Y(t)Y(s)^{-1} = A(t)U(t, s)$$

für alle $t, s \geq 0$. Weiter gelten $U(s, s) = Y(s)Y(s)^{-1} = I$ und

$$U(t, r)U(r, s) = Y(t)Y(r)^{-1}Y(r)Y(s)^{-1} = U(t, s).$$

c) Sei u die Lösung von (5.21). Aus der Produkt- und Kettenregel, einer Übung, sowie den Differentialgleichungen folgern wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} (U(t, s)u(s)) &= \frac{\partial}{\partial s} (Y(t)Y(s)^{-1}u(s)) \\ &= -Y(t)Y(s)^{-1}Y'(s)Y(s)^{-1}u(s) + Y(t)Y(s)^{-1}u'(s) \\ &= -U(t, s)A(s)Y(s)Y(s)^{-1}u(s) + U(t, s)(A(s)u(s) + g(s)) \\ &= U(t, s)g(s) \end{aligned}$$

für alle $t, s \geq 0$. Der Hauptsatz (3.5) liefert nun

$$u(t) - U(t, t_0)u(t_0) = \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial s} (U(t, s)u(s)) \, ds = \int_{t_0}^t U(t, s)g(s) \, ds.$$

Mit $u(t_0) = u_0$ und der Gleichung (3.6) folgt dann die Formel (5.24). Sie stellt u als Summe einer Funktion aus L_0 und der festen Lösung von (5.21) zu $u_0 = 0$ dar, sodass auch die letzte Behauptung wahr ist. $\square$

Wir studieren nun den autonomen Fall genauer. Seien $A \in L(\mathbb{R}^m)$ und $u_0 \in \mathbb{R}^m$. Wir suchen eine Darstellung der Hauptfundamentallösung für $t_0 = 0$ des Problems

$$u'(t) = Au(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0. \quad (5.25)$$

Für $m = 1$ gilt $u(t) = e^{tA}u_0$. Um dies zu imitieren, setzen wir A in die Exponentialreihe ein. Für $t \in [-T, T]$ und $k \in \mathbb{N}_0$ impliziert Satz 2.37 die Abschätzung

$$\left\| \frac{t^k}{k!} A^k \right\| \leq \frac{T^k \|A\|^k}{k!} =: b_k.$$

Nach Beispiel 3.15 aus Analysis 1 konvergiert die Reihe $\sum_k b_k$, sodass das Majorantenkriterium vor Satz 2.39 die Konvergenz der Matrizenreihe

$$e^{tA} = \exp(tA) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} A^k \quad (5.26)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ in $L(\mathbb{R}^m)$ zeigen. Es gelten dabei $e^{0A} = I$ und $Ae^{tA} = e^{tA}A$. Wir schreiben $S_n(t)$ für die obige Partialsumme. Ferner erhalten wir

$$S'_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k = A \sum_{l=0}^{n-1} \frac{t^l}{l!} A^l = AS_{n-1}(t)$$

und damit

$$\|Ae^{tA} - S'_n(t)\| = \left\| A \sum_{k=n}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{T^k}{k!} \|A\|^{k+1}$$

für alle $t \in [-T, T]$ und $n \in \mathbb{N}$. Also konvergiert S'_n für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf $[-T, T]$ gegen die Abbildung $t \mapsto Ae^{tA}$. Dies ist äquivalent zur komponentenweisen Konvergenz, sodass die Komponenten $[Ae^{tA}]_{ij}$ nach Theorem 5.31 in Analysis 1 die Ableitungen von $t \mapsto [S(t)]_{ij}$ sind. Somit existiert die Ableitung $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$ in $L(\mathbb{R}^m)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Iterativ behandelt man höhere Ableitungen entsprechend.

Wir sammeln nun die Eigenschaften der *Matrizenexponentialfunktion* e^{tA} . Dafür verwenden wir die Begriffe in Definition 5.19 analog auf dem Zeitintervall $\mathbb{R}$. Die Duhamelsche Formel (5.27) gilt im übrigen auch für $t \in \mathbb{R}$. (Man differenziere dazu etwa die Version der Formel wie in der zweiten Zeile von (5.24) nach $t \in \mathbb{R}$.)

SATZ 5.21. *Sei $A \in L(\mathbb{R}^m)$. Die Hauptfundamentallösung von (5.25) ist durch die Matrizenexponentialfunktion e^{tA} , $t \in \mathbb{R}$, aus (5.26) gegeben. Für $t, s \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden Aussagen.*

- a) $\exists \left(\frac{d}{dt}\right)^n e^{tA} = A^n e^{tA} = e^{tA} A^n$.
- b) $e^{0A} = I$, $e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA} = e^{sA} e^{tA}$.
- c) $\exists (e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.

d) Seien $A(t) = A$, $t_0 = 0$, $u_0 \in \mathbb{R}^m$ und $g \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m)$ in (5.21), sowie $t, s \in \mathbb{R}$. Dann hat (5.21) die Lösungsoperatoren $U(t, s) = e^{(t-s)A}$ und die Lösung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m; \quad u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(s) \, ds. \quad (5.27)$$

BEWEIS. Die Aussage a) und der erste Teil von b) wurden oben gezeigt, woraus die erste Behauptung folgt. Der zweite Teil von b) ergibt sich aus der nächsten Bemerkung. Aussage c) ist ein Konsequenz von b) für $s = -t$. Aus diesen Eigenschaften schließen wir auf die Gleichungen

$$U(t, s) = e^{tA}(e^{sA})^{-1} = e^{tA}e^{-sA} = e^{(t-s)A}$$

für alle $t, s \in \mathbb{R}$. Satz 5.20 liefert dann (5.27). $\square$

BEMERKUNG 5.22. a) Sei $AB = BA$ für $A, B \in L(\mathbb{R}^m)$. Dann gilt $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$. Dies zeigt man wie im skalaren Fall Beispiel 3.25 in Analysis 1. Hier benötigt man die Vertauschbarkeit von A und B . (Siehe die Übungen.)

b) Für $t, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{t\lambda I} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} I = e^{\lambda t} I.$$

Daraus folgt mit Teil a) die Gleichung $e^{t(\lambda I + A)} = e^{\lambda t} e^{tA}$.

c) Für $z = (\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in \mathbb{C}^m$ setzen wir $\bar{z} = (\bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_m) \in \mathbb{C}^m$, $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$. Dann liegen $\operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z$ in $\mathbb{R}^m$ und es gilt $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$. Für $T = [t_{jk}] \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ erhalten wir ferner

$$\overline{Tz} = \left(\overline{\sum_{k=1}^m t_{jk} \zeta_k} \right)_j = \left(\sum_{k=1}^m t_{jk} \bar{\zeta}_k \right)_j = T\bar{z},$$

woraus sich $\operatorname{Re}(Tz) = T(\operatorname{Re} z)$ und $\operatorname{Im}(Tz) = T(\operatorname{Im} z)$ ergeben.

Weiter strebt eine Folge (z_n) genau dann in $\mathbb{C}^m$ gegen z , wenn $\operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z$ in $\mathbb{R}^m$ für $n \rightarrow \infty$ konvergieren (siehe Satz 2.9 in Analysis 1 und Satz 2.9). Deswegen existiert die Ableitung

$$\frac{d}{dt} e^{tA} z = \frac{d}{dt} (e^{tA} \operatorname{Re} z + i e^{tA} \operatorname{Im} z) = A e^{tA} \operatorname{Re} z + i A e^{tA} \operatorname{Im} z = A e^{tA} z.$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Also lösen $u(t) = e^{tA} z$ das Problem (5.25) für $u_0 = z$, $\operatorname{Re} u(t)$ für $u_0 = \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} u(t)$ für $u_0 = \operatorname{Im} z$ und $\bar{u}(t)$ für $u_0 = \bar{z}$. $\diamond$

Wir berechnen nun e^{tA} mit Hilfe zentraler Resultate der linearen Algebra.

Berechnung von e^{tA} mittels der Jordan-Normalform. Es sei $A \in L(\mathbb{R}^m)$.

Schritt 1. Wir haben die (paarweise verschiedenen) *Eigenwerte* $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ von A , die die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$q(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_N)^{m_N}$$

von A sind. Die Exponenten $m_1, \dots, m_N \in \mathbb{N}$ heißen *algebraische Vielfachheiten* der Eigenwerte, und es gilt $m_1 + \dots + m_N = m$. Jeder Eigenwert λ_j besitzt definitionsgemäss einen *Eigenvektor* $v \in \mathbb{C}^m$; d.h., es gelten

$$v \neq 0 \quad \text{und} \quad Av = \lambda_j v.$$

Der *Eigenraum* $E_j = \text{Kern}(\lambda_j I - A)$ hat die Dimension $d_j \leq m_j$, die man als die *geometrische Vielfachheit* von λ_j bezeichnet. (Siehe Satz 4.2.3 und Lemma 4.3.2 in [3].) Man nennt λ_j *halbeinfach*, wenn $m_j = d_j$ ist. Ein Spezialfall sind *einfache* Eigenwerte mit $m_j = 1$.

Schritt 2. Sei $v \in E_j$. Aus $Av = \lambda_j v$ folgt dann $A^2 v = \lambda_j Av = \lambda_j^2 v$ und iterativ $A^n v = \lambda_j^n v$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Damit erhalten wir die Lösung

$$y(t) = e^{tA} v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \lambda_j^n v = e^{t\lambda_j} v, \quad t \in \mathbb{R},$$

von (5.25) mit $u_0 = v$. Wir wählen solche Lösungen zu Basen aller Eigenräume E_j , was $d_1 + \dots + d_N$ linear unabhängige Spalten einer Fundamentallösung liefert.

Schritt 3. Falls $d_j < m_j$ für einen Eigenwert λ_j von A gilt, betrachten wir den *Hauptraum*

$$H_j := \text{Kern}(A - \lambda_j I)^{m_j},$$

zu λ_j , der nach Satz 4.6.1 von [3] die Dimension m_j besitzt. Um eine Basis von H_j zu berechnen, wählen wir einen Eigenvektor v zu λ_j . Wir setzen $w_1 := v$ und lösen iterativ

$$(A - \lambda_j I)w_2 = w_1, \quad (A - \lambda_j I)w_3 = w_2, \quad \dots, \quad (A - \lambda_j I)w_l = w_{l-1}, \quad (5.28)$$

wobei die Gleichung $(A - \lambda_j I)w = w_l$ nicht mehr lösbar sei. Da $w_1 \neq 0$ ist, sieht man induktiv, dass alle Vektoren w_k ungleich 0 sind. Weiter folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} (A - \lambda_j I)^n w_k &= (A - \lambda_j I)^{n-1} w_{k-1} = \dots \\ &= \begin{cases} w_{k-n} \neq 0, & n \leq k-1, \\ (A - \lambda_j I)^{n-k} (A - \lambda_j I)v = 0, & n \geq k, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.29)$$

für alle $k \in \{1, \dots, l\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Ein Vektor $w \in \mathbb{C}^m$ mit

$$(A - \lambda_j I)^k w = 0 \quad \text{und} \quad (A - \lambda_j I)^{k-1} w \neq 0$$

für ein $k \in \mathbb{N}$ heißt *Hauptvektor k -ter Stufe* zu λ_j . Also ist ein Eigenvektor ein Hauptvektor erster Stufe und die w_k in (5.28) sind Hauptvektoren k -ter Stufe für $k \in \{1, \dots, l\}$.

Wir führen die Konstruktion in (5.28) für d_j linear unabhängige Eigenvektoren v zu λ_j durch. Die so berechneten Vektoren w_k liefern eine Basis von H_j gemäß des Beweises von Theorem 4.6.5 aus [3], siehe dort S. 266. Nach Satz 4.6.1 in [3] ist die Vereinigung dieser Basen eine Basis von $\mathbb{C}^m$.

Schritt 4. Seien w_k ein Hauptvektor k -ter Stufe zu λ_j und $t \in \mathbb{R}$. Bemerkung 5.22 b) und (5.29) implizieren dann

$$\begin{aligned} e^{tA}w_k &= e^{\lambda_j t} e^{t(A-\lambda_j I)}w_k = e^{\lambda_j t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (A - \lambda_j I)^n w_k \\ &= e^{\lambda_j t} \left(w_k + tw_{k-1} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} w_1 \right) =: y(t). \end{aligned} \quad (5.30)$$

(Schritt 2 ist der Fall $k = 1$.) Nach Satz 5.21 löst y das Problem (5.25) mit $y(0) = w_k$ sogar für $t \in \mathbb{R}$. Wir erhalten somit linear unabhängige Lösungen $y_1, \dots, y_m$ von $u' = Au$ auf $\mathbb{R}$ und die (unter Umständen komplexe) Fundamentallösung $Y = [y_1 \ \dots \ y_m]$. Nach (5.30) gilt ferner $Y(t) = e^{tA}Y(0)$ und damit

$$e^{tA} = [y_1(t) \ \dots \ y_m(t)][y_1(0) \ \dots \ y_m(0)]^{-1}$$

für $t \in \mathbb{R}$. Diese Matrix ist nach (5.26) reell.

Schritt 5. Wenn λ ein Eigenwert von A mit einem Hauptvektor w k -ter Stufe ist, so gilt dies auch für $\bar{\lambda}$ und $\bar{w}$. Dies folgt aus den Definitionen und Bemerkung 5.22 c). Wenn wir in der Basis aus Schritt 3 jeweils w und $\bar{w}$ (mit $w \neq \bar{w}$) auf $\operatorname{Re} w$ und $\operatorname{Im} w$ abbilden, so erhalten wir einen Isomorphismus von $\mathbb{C}^m$. Insbesondere bilden die so entstehenden Vektoren $\operatorname{Re} w$ und $\operatorname{Im} w$ zusammen mit den unveränderten reellen Hauptvektoren aus Schritt 3 eine Basis von $\mathbb{R}^m$. Weiter treten für nichtreelle λ_j und $\bar{\lambda}_j$ in (5.30) Paare komplex konjugierter Lösungen y und $\bar{y}$ auf. Wir ersetzen diese durch die Lösungen $\operatorname{Re} y$ und $\operatorname{Im} y$, siehe Bemerkung 5.22 c), und erhalten damit nach Satz 5.21 ein reelles Fundamentalsystem.

Wir fassen die obigen Überlegungen in einem Satz zusammen.

THEOREM 5.23. *Sei $A \in L(\mathbb{R}^m)$. Dann hat (5.25) eine (unter Umständen komplexe) Fundamentallösung $Y(t) = [y_1(t) \ \dots \ y_m(t)]$ für die durch (5.30) gegebenen linear unabhängigen Lösungen $y_1, \dots, y_m$ von (5.25). Wenn hier ein Eigenwert λ nicht reell ist, kann man die zugehörigen Lösung y_k durch $\operatorname{Re} y_k$ und $\operatorname{Im} y_k$ ersetzen und die Lösung $y_i = \bar{y}_k$ zu $\bar{\lambda}$ weglassen. Dies liefert eine reelle Fundamentallösung $\tilde{Y}$. Die Hauptfundamentallösung ist durch*

$$e^{tA} = Y(t)Y(0)^{-1} = \tilde{Y}(t)\tilde{Y}(0)^{-1}, \quad t \in \mathbb{R},$$

gegeben.

Wir erläutern das obige Vorgehen durch einige Beispiele. Man beachte, dass in den Einträgen der Matrizenexponentialfunktion auch Sinus, Kosinus oder Polynome auftreten können.

BEISPIEL 5.24. a) Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$. Hier sind die Eigenwerte gleich $\pm i$ und e^{tA} beschreibt eine Drehung in $\mathbb{R}^2$.

BEWEIS. Das charakteristische Polynom von A

$$q(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

hat die Nullstellen $\pm i$, die damit einfache Eigenwerte sind. Es reicht also i zu betrachten. Der Eigenvektor $v = (x \ y)^\top$ zum Eigenwert i erfüllt

$$0 = (iI - A)v = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff ix = -y.$$

Wir wählen $v = (1 \ -i)^\top$ und erhalten nach (5.30) die Lösung

$$y(t) = e^{it}v = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ t - i \cos t + \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil ergibt sich die reelle Fundamentallösung

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = Y(0)^{-1}.$$

Also hat $e^{tA} = Y(t)Y(0)^{-1}$ die behauptete Gestalt. $\square$

b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$. Hier ist 0 der einzige Eigenwert mit dem Eigenvektor $(1 \ 0)^\top$ und dem Hauptvektor $(0 \ 1)^\top$ zweiter Stufe.

BEWEIS. Das charakteristische Polynom von A

$$q(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2$$

hat nur die Nullstelle 0, die ein Eigenwert der algebraischen Vielfachheit 2 ist. Ein Eigenvektor $v = (x \ y)^\top$ von A erfüllt

$$0 = Av = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff y = 0.$$

Somit wird der Eigenraum von $v = e_1$ aufgespannt und 0 hat die geometrische Vielfachheit 1. Ein Hauptvektor $w = (x \ y)^\top$ zweiter Stufe muss der Bedingung

$$e_1 = Aw = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff y = 1$$

genügen. Wir wählen $w = e_2$. Gemäß (5.30) haben wir die Lösungen

$$y_1(t) = e^{0t}v = e_1 \quad \text{und} \quad y_2(t) = e^{0t}(w + tv) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $t \in \mathbb{R}$. Da $[y_1(0) \ y_2(0)] = I$ ist, folgt die Behauptung $e^{tA} = [y_1(t) \ y_2(t)]$. $\square$

c) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Hier hat man die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ mit der Vielfachheit $m_1 = 1$ und dem Eigenvektor $(1 \ 1 \ 1)^\top$, sowie $\lambda_2 = 1$ mit der Vielfachheit $m_2 = 2$, dem Eigenvektor $(0 \ 1 \ 0)^\top$ und dem Hauptvektor zweiter Stufe $(1 \ 0 \ 0)^\top$. Es gilt

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & e^{3t} - e^t \\ te^t & e^t & e^{3t} - e^t - te^t \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

für $t \in \mathbb{R}$. Das Anfangswertproblem

$$u'(t) = Au(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

hat die Lösung

$$u(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)A} \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} e^t \\ (t+3)e^t - 1 - t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

BEWEIS. Die Matrix A hat das charakteristische Polynom

$$q(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 1)^2$$

mit den behaupteten Eigenwerten und algebraischen Vielfachheiten. Die Eigenvektoren $v = (x \ y \ z)^\top$ zum einfachen Eigenwert 3 ist durch die Beziehung

$$0 = (3I - A)v = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff x = y = z$$

gegeben. Wir wählen $v = (1 \ 1 \ 1)^\top$ und erhalten die Lösung $y_1(t) = (e^{3t} \ e^{3t} \ e^{3t})^\top$ mit $t \in \mathbb{R}$. Die Eigenvektoren $v = (x \ y \ z)^\top$ zum Eigenwert 1 genügen der Gleichung

$$0 = (I - A)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff x = z = 0.$$

Also hat 1 die geometrische Vielfachheit 1 und den Eigenvektor $v = e_2$ samt der Lösung $y_2(t) = (0 \ e^t \ 0)^\top$. Um den Hauptvektor zweiter Stufe $w = (x \ y \ z)^\top$ zu bestimmen, betrachten wir das Problem

$$e_2 = (A - I)w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff x = 1, \ z = 0.$$

Wir wählen $w = e_1$ und erhalten die dritte Lösung $y_3(t) = e^t(w + tv) = (e^t \ te^t \ 0)^\top$ aus (5.30). Dies liefert die Fundamentallösung

$$Y(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ y_3(t)] = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & e^t \\ e^{3t} & e^t & te^t \\ e^{3t} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Somit erfüllt $e^{tA} = Y(t)Y(0)^{-1}$ die Behauptung. Die letzte Aussage folgt dann aus der Duhamelschen Formel (5.27) und partieller Integration. $\square$

Im nächsten Beispiel betrachten wir eine lineare Version des gedämpften Pendels aus den Beispielen 5.2 und 5.13. Insbesondere ersetzen wir die Rückstellkraft $-\gamma l^{-1} \sin(x)$ durch $-\omega^2 x$ was für $\omega = \sqrt{\gamma/l}$ und kleine $|x|$ eine gute Näherung ist.

BEISPIEL 5.25. Für gegebene $\omega > 0$, $r \geq 0$, $h \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R})$ und $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u''(t) &= -\omega^2 u(t) - 2ru'(t) + h(t), \quad t \geq 0, \\ u(0) &= u_0, \quad u'(0) = v_0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Wir setzen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2r \end{pmatrix}$ und $g(t) = (0 \ h(t))^T$ für $t \geq 0$. Indem wir $w = (u \ v)^T$ betrachten, ist gemäß Bemerkung 5.3 das Anfangswertproblem (5.31) zum System

$$\begin{aligned} w'(t) &= \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = Aw(t) + g(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ -\omega^2 u(t) - 2rv(t) + h(t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \\ w(0) &= \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.32)$$

äquivalent. Dabei ist die Lösung w von (5.32) von der Form $w = (u \ u')^T$ für eine Lösung u von (5.31). Somit hat die Fundamentallösung von (5.32) die Gestalt

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) & z(t) \\ y'(t) & z'(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

für zwei linear unabhängige Lösungen y und z von (5.31) mit $h = 0$.

Die Matrix A hat das charakteristische Polynom

$$q(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \omega^2 & \lambda + 2r \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2r\lambda + \omega^2$$

und damit die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = -r \pm \sqrt{r^2 - \omega^2}.$$

(Für $s > 0$ ist dabei $\sqrt{-s}$ gleich $\pm i\sqrt{s}$.) Die Eigenvektoren $v_{1,2} = (x \ y)^T$ erfüllen

$$0 = (\lambda_{1,2}I - A)v_{1,2} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,2} & -1 \\ \omega^2 & \lambda_{1,2} + 2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff y = \lambda_{1,2}x$$

Wir erhalten also Eigenvektoren $v_{1,2} = (1 \ \lambda_{1,2})^T$, die genau für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ linear unabhängig sind. Wir behandeln nun die Fälle nichtreeller, reeller und doppelter Eigenwerte getrennt.

1. *Fall.* (Schwingungsfall) Es sei $0 \leq r < \omega$, sodass keine oder schwache Dämpfung vorliegt. Dann gelten $\lambda_{1,2} = -r \pm i\alpha$ für $\alpha := \sqrt{\omega^2 - r^2} \in (0, \omega]$. Im Falle $r = 0$

ohne Dämpfung haben wir $\alpha = \omega$. Wir wählen $\lambda = -r + i\alpha$ und den Eigenvektor $v = (1 \ \lambda)^\top$ mit der Lösung

$$y(t) = e^{\lambda t} v = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ \lambda e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ \frac{d}{dt} e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten damit die reelle Fundamentallösung

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} e^{\lambda t} & \operatorname{Im} e^{\lambda t} \\ \operatorname{Re} \frac{d}{dt} e^{\lambda t} & \operatorname{Im} \frac{d}{dt} e^{\lambda t} \end{pmatrix} \\ &= e^{-rt} \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & \sin(\alpha t) \\ -r \cos(\alpha t) - \alpha \sin(\alpha t) & -r \sin(\alpha t) + \alpha \cos(\alpha t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $t \in \mathbb{R}$. Hier gelten

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{r}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich

$$e^{tA} = Y(t)Y(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-rt} (\cos(\alpha t) + \frac{r}{\alpha} \sin(\alpha t)) & e^{-rt} \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t) \\ * & * \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Gemäß der Duhamelschen Formel (5.27) ist die Lösung von (5.31) durch

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)A} \begin{pmatrix} 0 \\ h(s) \end{pmatrix} ds$$

gegeben. Dies liefert die Funktion

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-rt} \left(\cos(\alpha t) u_0 + \frac{r}{\alpha} \sin(\alpha t) u_0 + \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t) v_0 \right) \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \int_0^t e^{-r(t-s)} \sin(\alpha(t-s)) h(s) ds, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Für $r > 0$ und beschränkte h ist diese Lösung auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ beschränkt (und für $h = 0$ konvergiert sie gegen 0 für $t \rightarrow \infty$). Sei nun $r = 0$ (also $\alpha = \omega$), $h(s) = \sin(\omega s)$ und $u_0 = v_0 = 0$. Dann folgt mit einer trigonometrischen Formel der Ausdruck

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin(\omega(t-s)) \sin(\omega s) ds = \frac{1}{2\omega} \int_0^t (\cos(\omega t - 2\omega s) - \cos(\omega t)) ds \\ &= -\frac{1}{4\omega^2} \sin(\omega t - 2\omega s) \Big|_0^t - \frac{t}{2\omega} \cos(\omega t) = \frac{1}{2\omega^2} \sin(\omega t) - \frac{t}{2\omega} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

für $t \geq 0$. Diese Funktion oszilliert unbeschränkt, was ein Resonanzeffekt ist.

2. Fall. Im Falle $r > \omega$ starker Dämpfung sind die Eigenwerte $\lambda_2 < -r < \lambda_1 < 0$ einfach. Die Lösungen $y_{1,2}(t) = e^{\lambda_{1,2}t} v_{1,2}$ liefern dann die Fundamentallösung

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrizen konvergieren für $t \rightarrow \infty$ gegen 0. Wir lösen hier (5.32) im homogenen Fall $g = 0$ ohne $Y(0)^{-1}$ oder e^{tA} explizit auszurechnen. Wir setzen dazu $(a \ b)^T := Y(0)^{-1}(u_0 \ v_0)^T$, sodass $Y(0)(a \ b)^T = (u_0 \ v_0)^T$ und damit

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ \lambda_1 a + \lambda_2 b \end{pmatrix}$$

gelten. Wir erhalten dann die Lösung

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = Y(t)Y(0)^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = Y(t) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

wobei $Y(t)$ bekannt ist und man die Zahlen a und b aus dem obigen Gleichungssystem bestimmen kann. Für $u_0 = 1$ und $v_0 = 0$ und $h = 0$ ergeben sich z.B.

$$a = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad \text{und} \quad b = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

sowie die Lösung

$$u(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}.$$

von (5.31) mit $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ und $h = 0$.

3. Fall Im ‘aperiodischen Grenzfall’ $r = \omega$ hat der zweifache Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = -r$ die geometrische Vielfachheit 1 mit Eigenwert $v = (1 \ -r)^T$. Wir bekommen wie im Fall 2 die Lösung $y_1(t) = e^{-rt}v$ der Differentialgleichung in (5.31) mit $h = 0$. Weiter besitzt A einen Hauptvektor $w = (x \ y)^T$ zweiter Stufe, der durch

$$v = (A + rI)w \iff \begin{pmatrix} 1 \\ -r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 1 \\ -r^2 & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff rx + y = 1$$

bestimmt ist. Wir wählen $w = e_2$ und erhalten die zweite linear unabhängige Lösung $e^{-rt}(w + tv)$, deren erste Komponente gleich $y_2(t) = te^{-rt}$ für $t \in \mathbb{R}$ ist. Die Funktion y_2 löst (5.31) für $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ und $h = 0$. $\diamond$

5.4. Langzeitverhalten

In diesem letzten Abschnitt wollen wir untersuchen, wann die Lösungen für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergieren, wobei wir uns auf zwei einfachere, aber doch recht typische Situationen beschränken. In Analysis 4 werden wir diese Fragen vertiefen.

Zuerst betrachten wir wieder das lineare autonome und homogene Problem (5.25) mit der Systemmatrix $A \in L(\mathbb{R}^m)$. Im skalaren Fall $m = 1$ (mit $u_0 \neq 0$) konvergiert die Lösung $e^{tA}u_0$ genau dann für $t \rightarrow \infty$ gegen 0, wenn $\operatorname{Re} A < 0$ ist (und wir hier komplexe A zulassen). Dies legt es nahe, die *Spektralschranke*

$$s(A) = \max \{ \operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \mathbb{C} \text{ ist Eigenwert von } A \}.$$

zu definieren. Tatsächlich charakterisiert diese Größe, dass alle Lösungen von (5.25) gegen 0 konvergieren.

THEOREM 5.26. Seien $A \in L(\mathbb{R}^m)$ und $\varepsilon > 0$. Dann gelten die folgenden Aussagen.
a) Es gibt eine Konstante $M_\varepsilon \geq 1$ mit

$$\|e^{tA}\| \leq M_\varepsilon e^{(s(A)+\varepsilon)t} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

b) Jeder Eigenwert λ_k von A mit $\operatorname{Re} \lambda_k = s(A)$ sei halbeinfach (d.h., geometrische und algebraische Vielfachheit sind gleich). Dann gibt es eine Konstante $M \geq 1$ mit

$$\|e^{tA}\| \leq M e^{s(A)t} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

c) Genau wenn $s(A) < 0$ gilt, konvergiert für jedes $u_0 \in \mathbb{R}^m$ die Lösung $u(t) = e^{tA}u_0$ von (5.25) für $t \rightarrow \infty$ gegen 0. In diesem Fall erhalten wir sogar

$$|u(t)|_2 \leq M_\alpha e^{-\alpha t} |u(0)|_2$$

für alle $t \geq 0$ und $\alpha \in (0, -s(A))$, sowie für Konstanten $M_\alpha \geq 1$.

BEWEIS. a) Wir verwenden die Fundamentallösung $Y = [y_1 \cdots y_m]$ aus Theorem 5.23, wobei $e^{tA} = Y(t)Y(0)^{-1}$ gilt und die Funktionen y_k durch (5.30) gegeben sind. Mit Satz 2.37 zur Operatornorm und der Hilbert–Schmidt Norm aus Beispiel 2.38 erhalten wir zunächst die Abschätzung

$$\|e^{tA}\| \leq \|Y(t)\| \|Y(0)^{-1}\| \leq c \|Y(t)\|_{HS} = c \left(\sum_{k=1}^m |y_k(t)|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c\sqrt{m} \max_{1 \leq k \leq m} |y_k(t)|_2$$

für alle $t \geq 0$ und eine Konstante $c > 0$. Sei $k \in \{1, \dots, m\}$. Formel (5.30) liefert $y_k(t) = e^{\lambda_j t} p_k(t)$ für einen Eigenwert λ_j von A (mit $j = j(k)$) und ein Polynom $p_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ vom Grad kleiner gleich $m-1$. Wir finden nun für alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C_\varepsilon \geq 1$ mit $|p_k(t)|_2 \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon t}$ für alle $t \geq 0$. Daraus folgt $|y_k(t)|_2 \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon t} e^{\operatorname{Re} \lambda_j t}$ und damit die behauptete Schranke

$$\|e^{tA}\| \leq c\sqrt{m} C_\varepsilon e^{(s(A)+\varepsilon)t}, \quad t \geq 0.$$

b) Wenn $\operatorname{Re} \lambda_{j(k)} < s(A)$ ist, wählen wir oben für y_k speziell $\varepsilon = \varepsilon_k = s(A) - \operatorname{Re} \lambda_{j(k)} > 0$. Im Falle $\operatorname{Re} \lambda_{j(k)} = s(A)$ ist in b) der Eigenwert $\lambda_{j(k)}$ halbeinfach. Dann ist p_k konstant und man kann oben für y_k einfach $\varepsilon = \varepsilon_k = 0$ verwenden. Also gilt Aussage b).

c) Wenn $s(A) < 0$ ist, liefern Satz 2.37 und Teil a) die gewünschte Abschätzung

$$|u(t)|_2 = |e^{tA}u_0|_2 \leq \|e^{tA}\| |u_0|_2 \leq M_\alpha e^{-\alpha t} |u(0)|_2$$

für alle $t \geq 0$ und $\alpha \in (0, -s(A))$. Sei nun $s(A) \geq 0$. Dann gibt es einen Eigenwert $\lambda = s(A) + i\tau$ von A mit $\tau \in \mathbb{R}$ und einem Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^m$. Es sei etwa $\operatorname{Re} v \neq 0$. (Andernfalls nehme man unten $\operatorname{Im} v$.) Wir haben dann die Lösung

$$u(t) := e^{tA} \operatorname{Re} v = \operatorname{Re}(e^{tA}v) = \operatorname{Re}(e^{s(A)t} e^{i\tau t} v) = e^{s(A)t} \operatorname{Re}(e^{i\tau t} v),$$

siehe Bemerkung 5.22. Wenn $\tau = 0$ ist, so konvergiert $|u(t)|_2 = e^{s(A)t} |\operatorname{Re} v|_2$ für $t \rightarrow \infty$ nicht gegen 0. Für $\tau \neq 0$ sind $\lambda = s(A) + i\tau$ und $\bar{\lambda} = s(A) - i\tau$ Eigenwerte von A . Wir können also annehmen, dass τ positiv ist. Wir betrachten nun $t_n = 2\pi n/\tau$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $|u(t_n)|_2 = e^{s(A)t_n} |\operatorname{Re}(e^{2\pi ni}v)|_2 = e^{s(A)t_n} |\operatorname{Re} v|_2$, was für $n \rightarrow \infty$ auch nicht verschwindet. $\square$

BEISPIEL 5.27. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2)$. Diese Matrix hat das charakteristische Polynom

$$q(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - \operatorname{sp}(A)\lambda + \det(A).$$

Somit sind die Eigenwerte von A durch

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{sp}(A)}{2} \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sp}(A)^2}{4} - \det(A)}$$

gegeben. Man sieht nun leicht, dass genau dann $s(A) < 0$ gilt, wenn $\operatorname{sp}(A) = a + d < 0$ und $\det(A) = ad - bc > 0$ erfüllt sind. $\diamond$

Man beachte, dass man im obigen Beispiel die Konvergenzbedingung $s(A) < 0$ alleine durch polynomiale Ungleichungen in den (gegebenen!) Einträgen von A charakterisieren kann. Diese wichtige Eigenschaft läßt mit erheblichem Aufwand auf beliebige Dimensionen $m \geq 3$ verallgemeinern, vergleiche Satz 5.4.3 in [7].

Wir betrachten nun $f \in C(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $u_0 \in \mathbb{R}^m$ und das nichtlineare Problem

$$u'(t) = f(u(t)), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0. \quad (5.33)$$

Es gibt eine Klasse von spezieller Lösungen, die man (im autonomen Fall) besonders einfach berechnen kann. Für einen Vektor $u_* \in \mathbb{R}^m$ prüft man leicht die Äquivalenz

$$u : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m; \quad u(t) = u_*, \quad \text{löst (5.33) mit } u_0 = u_* \iff f(u_*) = 0. \quad (5.34)$$

In diesem Falle heißt u oder u_* *stationäre Lösung*, *Gleichgewicht* oder *Equilibrium*.

Es stellt sich dann die Frage, wie sich die Lösungen mit Startwerten u_0 nahe bei u_* verhalten. Dies kann detailliert mittels der Eigenwerte der *Linearisierung* $A := f'(u_*)$ untersucht werden. Wir beschränken uns hier auf Lyapunovs *Prinzip der linearisierten Stabilität*: Eine Lösung konvergiert exponentiell gegen das Gleichgewicht u_* , wenn $s(A) < 0$ ist und der Anfangswert nahe bei u_* liegt.

THEOREM 5.28. Seien $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ und $u_* \in \mathbb{R}^m$ mit $f(u_*) = 0$. Setze $A := f'(u_*) \in L(\mathbb{R}^m)$. Es gelte $s(A) < 0$. Wähle $\alpha \in (0, -s(A))$. Dann gibt es solche Konstanten $r > 0$ und $c \geq 1$, dass für jedes $u_0 \in \overline{B}(u_*, r)$ die Aussagen

$$\bar{t}(u_0) = \infty \quad \text{und} \quad |u(t) - u_*|_2 \leq ce^{-\alpha t} |u_0 - u_*|_2$$

für alle $t \geq 0$ gelten, wobei u die Lösung von (5.33) auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ist.

BEWEIS. 1)¹² Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen. Seien $u_0 \in \mathbb{R}^m$ und u die Lösung von (5.33). Wir setzen $v(t) = u(t) - u_*$ für $0 \leq t < \bar{t}(u_0)$ und

¹²In der Vorlesung wurden die Gleichungen anders nummeriert und der Beweis etwas informeller geführt.

$g(x) = f(u_* + x) - f(u_*) - Ax$ für $x \in \mathbb{R}^m$. Wegen (5.33) und $f(u_*) = 0$ erfüllt v die Differentialgleichung

$$v'(t) = u'(t) = f(u(t)) = Av(t) + f(u_* + v(t)) - f(u_*) - Av(t) = Av(t) + g(v(t))$$

für $0 \leq t < \bar{t}(u_0)$ und besitzt den Anfangswert $v(0) = u_0 - u_*$. Die Duhamelsche Formel (5.27) impliziert dann die zentrale Beziehung

$$v(t) = e^{tA}v(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}g(v(s)) \, ds, \quad 0 \leq t < \bar{t}(u_0). \quad (5.35)$$

Wir wollen hier den exponentiellen Abfall von e^{tA} nach Theorem 5.26 ausnutzen, und wählen dazu $0 < \alpha < \beta < -s(A)$. Dann gibt es eine Konstante $M \geq 1$ mit

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{-\beta t} \quad (5.36)$$

für alle $t \geq 0$. Wir setzen nun $\varepsilon = (\beta - \alpha)/M > 0$. Um in (5.35) die Nichtlinearität zu kontrollieren, verwenden wir die Definition der Ableitung von f bei u_* . Diese liefert uns so einen Radius $\delta > 0$, dass für alle $x \in \bar{B}(u_*, \delta)$ die Ungleichung

$$|g(x)|_2 \leq \varepsilon |x|_2 \quad (5.37)$$

gilt. Wir definieren nun $r = \frac{\delta}{2M}$. Im folgenden sei $u_0 \in \bar{B}(u_*, r)$ und damit $|v(0)|_2 \leq r < \delta$.

2) Wir haben das Problem, dass wir die Nichtlinearität nur auf einer Kugel abschätzen können und wir zunächst nicht wissen, ob die Lösung in dieser Kugel enthalten ist. Deswegen beschränken wir uns auf Zeitintervalle, in denen $v(t)$ in der Kugel bleibt und setzen dafür

$$\tau := \sup \left\{ t \in [0, \bar{t}(u_0)) \mid \forall s \in [0, t] : |v(s)|_2 \leq \delta \right\}.$$

Da $|v(0)|_2 < \delta$ gilt und v stetig ist, liegt τ in $(0, \bar{t}(u_0)]$. Für $t \in [0, \tau)$ erlauben dann die Formeln (5.35), (5.36) und (5.37) die Abschätzungen

$$\begin{aligned} e^{\beta t} |v(t)|_2 &\leq e^{\beta t} \left(Me^{-\beta t} |v(0)|_2 + \int_0^t Me^{-\beta(t-s)} |g(v(s))|_2 \, ds \right) \\ &\leq M |v(0)|_2 + M\varepsilon \int_0^t e^{\beta s} |v(s)|_2 \, ds. \end{aligned}$$

Gronwalls Satz 5.8 und die Wahl von ε und r implizieren nun die Ungleichungen

$$\begin{aligned} e^{\beta t} |v(t)|_2 &\leq M |v(0)|_2 e^{\varepsilon M t}, \\ |v(t)|_2 &\leq Me^{(\beta-\alpha)t} e^{-\beta t} |v(0)|_2 = Me^{-\alpha t} |u_0 - u_*|_2 \leq \delta/2 < \delta \end{aligned} \quad (5.38)$$

für $t \in [0, \tau)$. Wenn nun $\tau < \bar{t}(u_0)$ wäre, liefert die Stetigkeit von v ein $\tau' \in (\tau, \bar{t}(u_0))$ mit $|v(t)|_2 \leq \delta$ für alle $t \in [0, \tau']$. Dies widerspricht der Definition von τ , sodass $\tau = \bar{t}(u_0)$ ist. Also gilt (5.38) auf dem Intervall $[0, \bar{t}(u_0))$. Insbesondere liegt dann $u(t)$ in der Kugel $\bar{B}(u_*, \delta/2)$ für alle $t \in [0, \bar{t}(u_0))$. Theorem 5.7 zeigt nun die globale Existenz $\bar{t}(u_0) = \infty$ von u , und (5.38) ist die Behauptung. $\square$

Das obige Theorem lässt sich oft leicht anwenden wie etwa im folgenden Räuber-Beute-Modell mit Sättigung (siehe Beispiele 5.1 und 5.15) und danach beim gedämpften Pendel (siehe Beispiele 5.2 und 5.13). Diese und verwandte Systeme werden in Analysis 4 umfassender studiert. Insbesondere zeigen wir dann ‘globale’ Konvergenzaussagen für u_0 , die nicht unbedingt nahe bei u_* liegen.

BEISPIEL 5.29. Für Konstanten $a, b, c, r, s > 0$ und Anfangswerte $u_0, v_0 \geq 0$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= au(t) - bu(t)^2 - ru(t)v(t), & t \geq 0, \\ v'(t) &= -cv(t) + su(t)v(t), & t \geq 0, \\ u(0) &= u_0, \quad v(0) = v_0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Die rechte Seite definiert eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Wir suchen ein ‘Koexistenzgleichgewicht’ $(u_*, v_*) \in \mathbb{R}_+^2$. Für $u_*, v_* > 0$ gilt genau dann $f(u_*, v_*) = 0$, wenn $a - bu_* - rv_* = 0$ und $-c + su_* = 0$ sind. Dieses System wird nur von

$$(u_*, v_*) = \left(\frac{c}{s}, \frac{1}{r} \left(a - \frac{bc}{s} \right) \right)$$

gelöst. Genau für $as > bc$ liegt dieser Punkt in $\mathbb{R}_+^2$ und ist dann das einzige positive Gleichgewicht von (5.39). Ferner erhalten wir

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} a - 2bx - ry & -rx \\ sy & -c + sx \end{pmatrix}, \quad f'(u_*, v_*) = \begin{pmatrix} -\frac{bc}{s} & -\frac{rc}{s} \\ \frac{s}{r} \left(a - \frac{bc}{s} \right) & 0 \end{pmatrix} =: A.$$

Wir nehmen die Beziehung $as > bc$ an. Dann gelten $\text{sp}(A) < 0$ und $\det(A) > 0$, sodass die Ungleichung $s(A) < 0$ aus Beispiel 5.27 folgt. Theorem 5.28 liefert nun so eine Kugel B um (u_*, v_*) , dass für alle Anfangswerte (u_0, v_0) in B die Lösung $(u(t), v(t))$ für $t \rightarrow \infty$ exponentiell gegen (u_*, v_*) konvergiert. $\diamond$

BEISPIEL 5.30. Für Konstanten $\gamma, l, r > 0$ und Anfangswerte $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v(t) \\ -\frac{\gamma}{l} \sin u(t) - rv(t) \end{pmatrix} =: f(u(t), v(t)), & t \geq 0, \\ (u(0), v(0)) &= (u_0, v_0). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Dies ist das Pendel aus Beispiel 5.2 und 5.13 im Spezialfall linearer Dämpfung. Die Nullstellen von f sind $(k\pi, 0)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Für diese Gleichgewichte gilt

$$f'(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\gamma}{l}(-1)^k & -r \end{pmatrix} =: A_k.$$

Wir haben $\text{sp}(A_k) < 0$, sowie $\det(A_k) > 0$ für gerade k und $\det(A_k) < 0$ für ungerade k . Nach Beispiel 5.27 ist also $s(A_k) < 0$ für gerade k ; hier lässt sich Theorem 5.28 anwenden. Dieses Gleichgewicht entspricht dem gerade herabhängenden Pendel. Für ungerade k ist $s(A_k) > 0$. In diesem Fall steht das Pendel aufrecht, und wir zeigen in Analysis 4, dass dieses Gleichgewicht ‘instabil’ ist. $\diamond$

Literaturverzeichnis

- [1] H. Amann und J. Escher, *Analysis I*. Dritte Auflage. Birkhäuser, 2006.
- [2] H. Amann und J. Escher, *Analysis II*. Zweite, korrigierte Auflage. Birkhäuser, 2006.
- [3] G. Fischer, *Lineare Algebra*. 16te Auflage. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2008.
- [4] O. Forster, *Analysis 1*. Achte verbesserte Auflage. Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 2006.
- [5] K. Königsberger, *Analysis 1*. Sechste, durchgesehene Auflage, Springer–Verlag, 2004.
- [6] J.W. Prüss, R. Schnaubelt, R. Zacher, *Mathematische Modelle in der Biologie. Deterministische homogene Systeme*. Birkhäuser, 2008.
- [7] J.W. Prüss und M. Wilke, *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme*. 2te Auflage, Birkhäuser, 2019.