

Analysis 4

Skriptum vom Sommersemester 2022

Dieses Skriptum folgt meiner Vorlesung im Sommersemester 2022, wobei vereinzelt kleinere Korrekturen und Ergänzungen vorgenommen wurden. Im Gegensatz zur Vorlesung wird die Windungszahl nun in den ersten drei Kapitel mitbehandelt. Die Nummerierung blieb dabei weitgehend unverändert. Die Beweise und Rechnungen im Skriptum sind typischerweise etwas knapper gehalten als in der Vorlesung. Es fehlen darüberhinaus die Mehrzahl der Schaubilder und viele mündlichen Erläuterungen aus der Vorlesung. Die Verweise auf Analysis 1-3 beziehen sich auf meine gleichnamigen Skripten aus den Jahren 2020-22. Ich verwende gelegentlich Begriffe, Notationen und Standardresultate aus diesen Skripten ohne weiteren Kommentar.

Ich bedanke mich herzlich bei Konstantin Zerulla und Esther Bleich für ihre Unterstützung bei der Erstellung früherer Versionen dieses Skriptums, sowie bei Esther Bleich für die Erstellung der Bilder.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Komplexe Ableitung und Kurvenintegrale	1
1.1. Holomorphie	1
1.2. Einige elementare Funktionen	7
1.3. Komplexe Kurvenintegrale	13
Kapitel 2. Der Cauchysche Integralsatz und seine Folgerungen	22
2.1. Cauchys Integralsatz und -formel	22
2.2. Folgerungen aus dem Integralsatz	29
2.3. Homotope Varianten der Cauchyschen Sätze	38
Kapitel 3. Isolierte Singularitäten	43
3.1. Klassifikation und Laurentreihen	43
3.2. Residuen und reelle Integrale	50
Kapitel 4. Grundlagen der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen	56
4.1. Einführung	56
4.2. Wohlgestelltheit von Anfangswertproblemen und globale Existenz	60
4.3. Dynamische Systeme	71
4.4. Randwertprobleme	75
4.5. Der lineare autonome Fall	79
Kapitel 5. Phasenebene und Invarianz	84
5.1. Erstes Integral und Phasenebene	84
5.2. Invariante Mengen	94
Kapitel 6. Langzeitverhalten	101
6.1. Stabilität von stationären Lösungen	101
6.2. Das Prinzip der linearisierten Stabilität	105
6.3. Lyapunovfunktionen	110
Literaturverzeichnis	116

KAPITEL 1

Komplexe Ableitung und Kurvenintegrale

In den ersten drei Kapiteln sei stets D eine nichtleere offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Wir werden in der ersten Hälfte der Vorlesung die grundlegenden Aussagen der Differentialrechnung im Komplexen darstellen. Im Deutschen nennt man dieses Gebiet der Mathematik auch *Funktionentheorie*. Im ersten Kapitel beginnen wir mit einigen Vorbereitungen und Beispielen.

1.1. Holomorphie

Wie in Analysis 1 besprochen, werden die komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} z + w &= (x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v), \\ zw &= z \cdot w = (x + iy) \cdot (u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu) \end{aligned}$$

versehen, wobei $i^2 = -1$ und $w = u + iv$ mit $u, v \in \mathbb{R}$ sind. Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ via der Abbildung $z = x + iy \mapsto (x, y)$. Reell geschrieben wird die komplexe Multiplikation dann zu einem Matrix-Vektor Produkt der Form

$$z \cdot w = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & -\frac{y}{r} \\ \frac{y}{r} & \frac{x}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

mit $r := \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ für $z \neq 0$. Die Matrix

$$U = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & -\frac{y}{r} \\ \frac{y}{r} & \frac{x}{r} \end{pmatrix}$$

ist orthogonal mit $\det U = 1$. Also ist die komplexe Multiplikation $w \mapsto zw$ mit einem festen $z \neq 0$ reell betrachtet eine durch x und y bestimmte Drehstreckung.

Weiter definieren wir für die Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ihr komplex Konjugiertes

$$\bar{z} = x - iy,$$

ihren Real- und Imaginärteil

$$\operatorname{Re} z = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}),$$

sowie ihren Betrag

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Wir schreiben ferner

$$B(c, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\} \quad \text{und} \quad \overline{B}(c, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| \leq r\}$$

für die offene bzw. abgeschlossene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt $c \in \mathbb{C}$ und Radius $r \geq 0$. (Für $r = 0$ erhält man $B(c, 0) = \emptyset$ bzw. $\overline{B}(c, 0) = \{c\}$.) Hierbei stimmt die Norm von $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ mit der von $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_2)$ überein, und diese Räume haben die gleichen Eigenschaften bzgl. Konvergenz, Stetigkeit, Offenheit usw. Es gilt

$$z_n \rightarrow z \text{ in } \mathbb{C} \text{ für } n \rightarrow \infty \iff \operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} z \text{ und } \operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} z \quad (1.2)$$

in $\mathbb{R}$ für $n \rightarrow \infty$.

Die Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzt auch die Polardarstellung $z = re^{i\phi}$ mit $r = |z|$ und dem *Argument*

$$\phi = \arg z := \begin{cases} \arccos \frac{x}{r}, & y > 0, \\ 0, & z \in (0, +\infty) = \mathbb{R}_+, \\ -\arccos \frac{x}{r}, & y < 0, \\ \pi, & z \in (-\infty, 0) = \mathbb{R}_-, \end{cases}$$

vergleiche Satz 4.49 in Analysis 1. Dabei ist $\phi \in (-\pi, \pi]$. (Wir schreiben ferner $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, +\infty)$ und $\mathbb{R}_{\leq 0} = (-\infty, 0]$.) Für das Produkt der komplexen Zahlen $z = re^{i\phi}$ und $w = se^{i\psi}$ ergibt sich daraus die geometrisch anschaulichere Formel

$$zw = rse^{i(\phi+\psi)} = |z||w|e^{i(\phi+\psi)}.$$

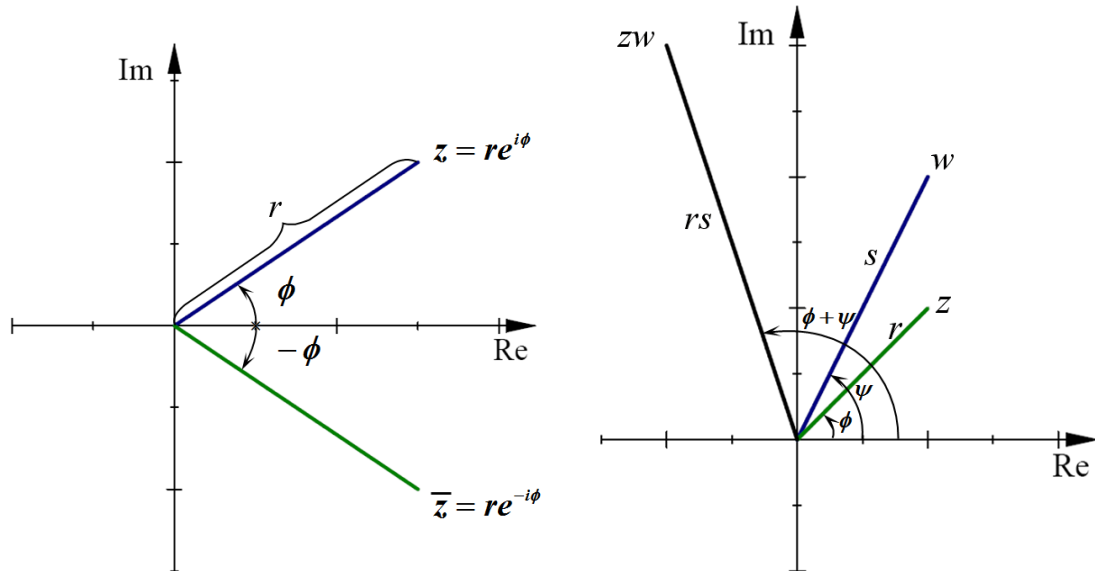


ABBILDUNG 1.1. Die Schaubilder zeigen den Betrag, das Argument, das komplex Konjugierte und die komplexe Multiplikation.

Für komplexe Funktionen kann man die Ableitung genauso wie im Reellen durch den Differenzenquotienten einführen.

DEFINITION 1.1. Sei $z_0 \in D$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar in z_0 , wenn der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D \setminus \{z_0\}}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

in $\mathbb{C}$ existiert. Wir nennen $f'(z_0)$ die Ableitung von f bei z_0 . Wenn f in allen Punkten $z_0 \in D$ komplex differenzierbar ist, so bezeichnet man f als holomorph (auf D) mit Ableitung $f' : D \rightarrow \mathbb{C}$. Man schreibt dann $f \in H(D)$. Iterativ definiert man die höheren Ableitungen $f^{(n)} : D \rightarrow \mathbb{C}$ von f für $n \in \mathbb{N}$.

Die meisten der elementaren Rechenregeln für die komplexe Ableitung zeigt man genauso wie für reelle Funktionen in Analysis 1. (Siehe Bemerkung 5.8 dort.) Der Beweis der Umkehrregel läßt sich aber nicht übertragen, da wir dafür in Analysis 1 die Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$ verwendet haben. Wir diskutieren diesen Satz am Ende des Abschnittes.

BEMERKUNG 1.2. a) Die Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = 1$, und $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$; $g(z) = z$, sind holomorph mit den Ableitungen $f' = 0$ bzw. $g' = 1$ auf $\mathbb{C}$.

b) Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei $z_0 \in \mathbb{C}$, die Menge $\tilde{D} \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $f(D) \subseteq \tilde{D}$, die Funktion $h : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{C}$ sei bei $f(z_0)$ komplex differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann existieren die komplexen Ableitungen

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)'(z_0) &= \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0), \\ (fg)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0), \\ \left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) &= -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2} \quad (\text{falls } f(z_0) \neq 0), \\ (h \circ f)'(z_0) &= h'(f(z_0))f'(z_0). \end{aligned}$$

c) Nach a) und b) sind Polynome p und rationale Funktionen $\frac{p}{q}$ auf $D = \mathbb{C}$ bzw. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) \neq 0\}$ holomorph mit den aus Analysis 1 bekannten Ableitungen. $\diamond$

Für gegebene Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir den *Konvergenzradius*

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \in [0, +\infty].$$

Es sei $\rho > 0$ und $c \in \mathbb{C}$. Nach Theorem 3.29 in Analysis 1 existiert die Potenzreihe

$$f : B(c, \rho) \rightarrow \mathbb{C}; \quad f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - c)^k,$$

wobei $B(c, +\infty) := \mathbb{C}$ ist. Gemäß Korollar 4.44 aus Analysis 1 ist diese Funktion stetig und die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf allen Kreisen $\overline{B}(c, r)$

mit $r \in (0, \rho)$. Im Reellen hatten wir die Ableitung von f mit Hilfe des Mittelwertsatzes berechnet, der $\mathbb{R}^2$ -wertig falsch ist. Unser Vorgehen müssen wir aber nur leicht abändern, um die Resultate aus Analysis 1 ins Komplexe zu übertragen.

SATZ 1.3. *Seien $a_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N}_0$, $\rho > 0$ und $c \in \mathbb{C}$. Die oben definierte Potenzreihe ist auf $B(c, \rho)$ beliebig oft komplex differenzierbar. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $f^{(n)}$ auch eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$ und erfüllt $f^{(n)}(c) = n!a_n$ sowie*

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) a_k (z-c)^{k-n} \quad \text{für } z \in B(c, \rho).$$

BEWEIS. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $z \neq w$ in $\overline{B}(c, r) =: B$ für ein $r \in (0, \rho)$. Nach Bemerkung 1.2 hat die Partialsumme $f_m(z) = \sum_{k=0}^m a_k (z-c)^k$ die Ableitung

$$f'_m(z) = \sum_{k=1}^m k a_k (z-c)^{k-1}.$$

Man sieht wie in Korollar 5.32 aus Analysis 1, dass die Reihe

$$g : B(c, \rho) \rightarrow \mathbb{C}; \quad g(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (z-c)^{k-1}$$

den gleichen Konvergenzradius ρ besitzt, sodass (f'_m) gleichmäßig auf B gegen g konvergiert. Der Hauptsatz, siehe (1.8) unten, liefert ferner die Gleichung

$$\frac{f_m(w) - f_m(z)}{w - z} = \frac{1}{w - z} \int_0^1 \frac{d}{dt} f_m(z + t(w - z)) dt = \int_0^1 f'_m(z + t(w - z)) dt,$$

wobei auch die Kettenregel einging.¹ Also gilt

$$\left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z) \right| \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 f'_m(z + t(w - z)) dt - g(z) \right|.$$

Die Eigenschaften des komplexen Integrals aus Bemerkung 5.10 in Analysis 3, siehe auch Abschnitt 1.3 unten, implizieren

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 f'_m(z + t(w - z)) dt - g(z) \right| \\ & \leq \left| \int_0^1 (f'_m(z + t(w - z)) - g(z + t(w - z))) dt \right| + \left| \int_0^1 (g(z + t(w - z)) - g(z)) dt \right| \\ & \leq \max_{\zeta \in B} |f'_m(\zeta) - g(\zeta)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |g(z + t(w - z)) - g(z)|. \end{aligned}$$

Das erste Maximum strebt gegen 0 für $m \rightarrow \infty$. Da das zweite für $w \rightarrow z$ verschwindet, hat f die Ableitung $g(z)$ bei z . Per Iteration folgt die Behauptung. $\square$

Wir erinnern an drei wichtige elementare Funktionen.

¹Der Rest des Beweises wurde in der Vorlesung ausgelassen.

BEISPIEL 1.4. Aus Analysis 1 kennen wir die Potenzreihen

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

für $z \in \mathbb{C}$. Mit dem obigen Satz erhält man wie in Beispiel 5.13 in Analysis 1 die Ableitungen $\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$ auf $\mathbb{C}$. Wir erinnern auch an die Rechenregeln

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w), \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp z}, \quad \overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z}) \quad (1.3)$$

der Exponentialfunktion für $z, w \in \mathbb{C}$, siehe Beispiel 3.25 aus Analysis 1. $\diamond$

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Wir betrachten D als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und setzen $u = \operatorname{Re} f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $v = \operatorname{Im} f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Damit können wir f als Funktion

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix},$$

in $\mathbb{R}^2$ auffassen. Damit stellt sich die Frage, wie die komplexe Ableitung mit der in $\mathbb{R}^2$ aus Definition 3.7 in Analysis 2 zusammenhängt. Laut des nächsten wichtigen Satzes ist die komplexe Differenzierbarkeit gleichwertig zu der im Reellen plus einer speziellen Struktur der Jacobimatrix.

SATZ 1.5. Seien $f : D \rightarrow \mathbb{C}$; $f = u + iv$, und $z = x + iy \in D$ wie oben. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

a) f ist in z komplex differenzierbar.

b) f ist in z reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\partial_x u(x, y) = \partial_y v(x, y), \quad \partial_y u(x, y) = -\partial_x v(x, y). \quad (1.4)$$

In diesem Fall hat f in $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ die Jacobimatrix

$$f'(z) = \begin{pmatrix} \partial_x u(x, y) & \partial_y u(x, y) \\ \partial_x v(x, y) & \partial_y v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u(x, y) & \partial_y u(x, y) \\ -\partial_y u(x, y) & \partial_x u(x, y) \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

BEWEIS. Definitionsgemäß ist f genau dann in z reell differenzierbar, wenn es so eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gibt, dass

$$\frac{1}{|w - z|_2} |f(w) - f(z) - A(w - z)|_2 \rightarrow 0, \quad w \rightarrow z,$$

konvergiert, wobei $w \in D \setminus \{z\}$ ist. Diese Aussage ist äquivalent dazu, dass u und v bei (x, y) die reelle Ableitungen $u'(x, y) = a$ bzw. $v'(x, y) = b$ in $\mathbb{R}^{1 \times 2}$ besitzen.

Andererseits sieht man wie in Analysis 2 vor Definition 3.7, dass f genau dann in z komplex differenzierbar ist, wenn die obige Konvergenz gilt und dabei die Matrix A einer komplexen Zahl wie in (1.1) entspricht, die dann gleich $f'(z)$ ist.

Wegen (1.1) liefern diese Beobachtungen die behauptete Äquivalenz und (1.5). $\square$

Wir werden die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen immer wieder zum Nachweis der Holomorphie heranziehen, z.B. gleich unten im Beweis von Satz 1.9. Ihre geometrische Bedeutung diskutieren wir in Bemerkung 1.7 und die analytische in Bemerkung 2.7. Zunächst nutzen wir sie um zu zeigen, dass zwei wichtige Funktionen nicht holomorph sind.

BEISPIEL 1.6. a) Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = \bar{z} = x - iy$, ist nirgends komplex differenzierbar. Hier sind $u(x, y) = x$ und $v(x, y) = -y$, sodass $\partial_x u = 1$ und $\partial_y v = -1$ nirgends übereinstimmen und damit (1.4) für alle $z \in \mathbb{C}$ verletzt ist.

b) Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$, ist nur in 0 komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(0) = 0$. In diesem Fall haben wir $u(x, y) = x^2 + y^2$ und $v = 0$: Also verschwinden die partiellen Ableitungen von u nur in 0, was von den Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen (1.4) gefordert wird.

c) Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = \frac{1}{z}$, ist nach Bemerkung 1.2 holomorph. Es gilt hierbei

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = u(x, y) + iv(x, y),$$

woraus man leicht die partiellen Ableitungen

$$\partial_x u(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \partial_y v(x, y), \quad \partial_y u(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\partial_x v(x, y),$$

berechnet, die natürlich den Gleichungen (1.4) genügen. $\diamond$

BEMERKUNG 1.7. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ bei $z \in D$ komplex differenzierbar. Wir setzen $A := f'(z) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Gleichung (1.5) impliziert

$$\rho := \det A = (\partial_x u(x, y))^2 + (\partial_y u(x, y))^2 \geq 0,$$

und es gilt $A^\top A = \rho I$. Sei nun $f'(z) \neq 0$. Dann ist $\rho > 0$ und damit $\rho^{-1} A^\top$ die Inverse von A . Für Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ folgen damit die Identitäten

$$(Av|Aw) = (v|A^\top Aw) = \rho(v|w) \quad \text{und} \quad |Av|_2 = (Av|Av)^{\frac{1}{2}} = \rho^{\frac{1}{2}}|v|_2.$$

Seien nun $\gamma_1, \gamma_2 : [-1, 1] \rightarrow D$ zwei C^1 -Kurven, die sich für $t = 0$ in z schneiden. Bei z haben ihre Tangenten die Richtungen $\gamma'_j(0) =: v_j \in \mathbb{R}^2$, die ungleich 0 seien. Die Bildkurven $\varphi_j = f \circ \gamma_j$ unter f besitzen die Tangentenvektoren $\varphi'_j(0) = f'(\gamma_j(0))\gamma'_j(0) = Av_j$ bei $f(z)$. Die abgesetzten Gleichungen liefern die Identität

$$\frac{(Av_1|Av_2)}{|Av_1|_2 |Av_2|_2} = \frac{(v_1|v_2)}{|v_1|_2 |v_2|_2}.$$

Also ist der Kosinus des Winkels zwischen Av_1 und Av_2 gleich dem zwischen v_1 und v_2 . Somit ist f an Stellen z mit $f'(z) \neq 0$ winkeltreu und orientierungstreu. (Siehe §IX.1 in [4] für weitergehende Aussagen.) $\diamond$

Wir wenden uns nun der Frage zu, wann die Umkehrabbildung einer injektiven holomorphen Funktion wieder holomorph ist, wobei wir zuerst einen entsprechenden Begriff einführen.

DEFINITION 1.8. Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer, $f : U \rightarrow V$ bijektiv, sowie f und f^{-1} holomorph. Dann ist f biholomorph, sowie U und V konform äquivalent.

Der folgende Kriterium für lokale Biholomorphie ergibt sich leicht aus dem Umkehrsatz im Reellen. In Theorem 3.5 werden wir ein deutlich stärkeres globales Resultat kennenlernen.

SATZ 1.9. a) Seien $f : U \rightarrow V$ biholomorph und $z \in U$. Dann ist $f'(z) \neq 0$ und für $w = f(z)$ gilt

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} = \frac{1}{f'(z)}.$$

b) Seien $f \in H(D) \cap C^1(D, \mathbb{R}^2)$ und $z_0 \in D$ mit $f'(z_0) \neq 0$. Dann gibt es solche offene nichtleere Mengen $U \subseteq D$ mit $z_0 \in U$ und $V \subseteq \mathbb{C}$, dass die Einschränkung $f|_U : U \rightarrow V$ biholomorph ist. Insbesondere gilt dann Teil a) für $f|_U$ und alle $z \in U$.

BEWEIS. a) Wegen der Voraussetzung können wir die Gleichung $z = f^{-1}(f(z))$ für $z \in U$ mittels der Kettenregel aus Bemerkung 1.2 ableiten. Es ergibt sich $1 = (f^{-1})'(f(z))f'(z)$ und damit Behauptung a).

b) Wie in Bemerkung 1.7 ist für $f'(z_0) \neq 0$ die zugehörige Jacobimatrix invertierbar. Theorem 3.36 aus Analysis 2 liefert nun solche offenen Mengen $U \subseteq D$ und $V \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $z_0 \in U$, dass $f|_U : U \rightarrow V$ diffeomorph ist. Weiter ist die Jacobimatrix B von $(f|_U)^{-1}$ bei $w = f(z) \in V$ gleich der Inversen von $A = f'(z)$ bei $z \in U$. Nach (1.5) hat A die Form $A = \begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix}$ für gewisse $s, t \in \mathbb{R}$, woraus die Identität

$$B = \frac{1}{s^2 + t^2} \begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix}$$

folgt. Also ist $(f|_U)^{-1}$ gemäß Satz 1.5 auf V holomorph. $\square$

1.2. Einige elementare Funktionen

In diesem Abschnitt studieren wir das Abbildungsverhalten einiger grundlegender Funktionen und zeigen dabei mittels Satz 1.9, dass geeignete Einschränkungen biholomorph sind. Da man es im Grunde mit Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zu tun hat, sind solche Untersuchungen in $\mathbb{C}$ deutlich komplizierter als in $\mathbb{R}$.

A) Möbiustransformationen. Wir betrachten Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

mit $\det A = ad - bc \neq 0$. (Also ist $(c, d) \neq (0, 0)$.) Dann hat A die Inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Die rationale Funktion

$$m_A : D_A \rightarrow \mathbb{C}; \quad m_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{mit} \quad D_A = \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}, & c \neq 0, \\ \mathbb{C}, & c = 0, \end{cases}$$

bezeichnet man als *Möbiustransformation*. Wir notieren eine Reihe grundlegender Eigenschaften, wobei wir längere Rechnungen auslassen, vergleiche §I.9 in [4].

a) Nach Bemerkung 1.2 ist m_A holomorph.

b) Für alle $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $m_{\alpha A} = m_A$. Weiter sind genau $m_{\alpha I}$ die identische Abbildung $\text{id} : z \mapsto z$ auf $\mathbb{C}$.

c) Sei $B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ invertierbar. Man berechnet leicht, dass m_A die Menge $D' := D_A \cap D_{BA}$ in D_B abbildet und auf D' die Kompositionsregel $m_B \circ m_A = m_{BA}$ gilt.

d) Aus Teil c) folgen die Gleichungen $m_{A^{-1}} \circ m_A = \text{id}$ auf D_A , und $m_A \circ m_{A^{-1}} = \text{id}$ auf $D_{A^{-1}}$. Somit ist $m_A : D_A \rightarrow D_{A^{-1}}$ biholomorph.

e) Für $c \neq 0$ können wir $m_A(z)$ in der Form

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \cdot \frac{1}{cz + d}$$

auf D_A schreiben. Im Falle $c = 0$ gilt einfacher

$$\frac{az + b}{d} = \frac{az}{d} + \frac{b}{d}$$

auf $\mathbb{C}$. Demnach ist jede Möbiustransformation gleich einem Produkt $m_A = S_1 J S_2$ von affinen Abbildungen S_k und der Inversion $Jz = \frac{1}{z}$ (die für $c = 0$ wegfällt). Dabei ist eine affine Abbildung die Komposition einer Drehstreckung $Vz = \alpha z$ und einer Translation $Tz = z + \beta$. Folglich ist jede Möbiustransformation aus den speziellen Möbiustransformationen T , V und J zusammengesetzt.

Die mögliche Definitionslücke in D_A erschwert die obigen Überlegungen. Aus diesem und anderen Gründen ergänzt man gelegentlich $\mathbb{C}$ um das Element ' ∞ '. In dieser Vorlesung wird dies aber (fast) keine Rolle spielen.

DEFINITION 1.10. Wir setzen $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, wobei das neue Element ∞ den folgenden Rechenregeln genügt.

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C} : \quad & z + \infty = \infty + z = \infty, & \frac{z}{\infty} &= 0, \\ \forall z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\} : \quad & z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty, & \frac{z}{0} &= \infty. \end{aligned}$$

Verboten sind die Ausdrücke $\infty \cdot 0$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty + \infty$. Wir schreiben $z_n \rightarrow \infty$, wenn $|z_n| \rightarrow +\infty$ in $\mathbb{R}$ für $n \rightarrow +\infty$ gilt.

Die obigen Rechenregeln respektieren den letztgenannten Konvergenzbegriff. Laut einer Übung entspricht er einer Metrik auf $\mathbb{C}_\infty$. Man beachte, dass sich $\mathbb{R}_\infty$ von $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ aus Analysis 1 unterscheidet. Zum Beispiel gelten $-n \rightarrow \infty$ oder $(-1)^n n \rightarrow \infty$ in $\mathbb{R}_\infty$, aber $-n \rightarrow -\infty$ in $\overline{\mathbb{R}}$ und $((-1)^n n)_n$ divergiert in $\overline{\mathbb{R}}$.

Wegen $\det A \neq 0$ sind für $c = 0$ die Zahlen a und d ungleich 0. Wir können deshalb die Möbiustransformation mittels $m_A(-\frac{d}{c}) := \infty$ und $m_A(\infty) := \frac{a}{c}$ zu einer stetigen Bijektion $m_A : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ mit der Inversen $m_{A^{-1}}$ fortsetzen. Wir erhalten damit zwei weitere Eigenschaften der Möbiustransformationen.

f) Die Menge $\mathcal{M} = \{m_A : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty \mid \det A \neq 0\}$ ist eine Gruppe bezüglich $\circ$ und $\Phi : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}; A \mapsto m_A$, ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus² mit Kern $\{\alpha I \mid \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$. Dies folgt leicht aus den Punkten b)–d) und einer getrennten Betrachtung der Fälle $z = -d/c$, $z = \infty$, bzw. $z = a/c$ für die Inverse.

g) Wir nennen Kreislinien oder affine Geraden in $\mathbb{C}$ *verallgemeinerte Kreise* in $\mathbb{C}_\infty$. Ihre Bilder unter Möbiustransformationen sind wieder verallgemeinerte Kreise. Diese Invarianz kann man für die Abbildungen T und V leicht nachprüfen; für J ist es eine kleine Rechnung. Dann folgt Behauptung g) aus der (leicht zu zeigenden) Variante von Aussage e) für $\mathbb{C}_\infty$.

Diese Eigenschaften erlauben einen recht guten Einblick in das Abbildungsverhalten von Möbiustransformationen. Beispiele werden in den Übungen diskutiert.

B) Potenzen und Wurzeln. Wir betrachten den (offenen) *Sektor*

$$\Sigma_\theta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |\arg z| < \theta\}$$

für $\theta \in (0, \pi]$. Spezialfälle sind die offene rechte Halbebene

$$\mathbb{C}_+ := \Sigma_{\pi/2} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$$

und die geschlitzte Ebene $\Sigma_\pi = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Für $|\phi| \leq \pi$ liegt die Zahl $z = |z|e^{i\phi} \neq 0$ genau für $|\phi| < \theta$ in Σ_θ .

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wir definieren die Potenzfunktion

$$P_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; P_n(z) = z^n = |z|^n e^{in\phi}.$$

Diese bildet den offenen Halbstrahl

$$s_\theta := \{re^{i\theta} \mid r > 0\}$$

für $\theta \in \mathbb{R}$ bijektiv auf $s_{n\theta}$ ab, da P_n auf $\mathbb{R}_+$ bijektiv ist. Somit ist die Einschränkung

$$p_n := P_n|_{\Sigma_{\pi/n}} : \Sigma_{\pi/n} \rightarrow \Sigma_\pi$$

bijektiv. Dabei ist P_n schon auf $\overline{\Sigma_{\pi/n}}$ nicht mehr injektiv. Zum Beispiel haben für $n = 2$ die Zahlen $\pm i$ auf $\partial\Sigma_{\pi/2}$ das gleiche Bild $P_2(\pm i) = i^2 = -1$.

Wir diskutieren im Falle $n = 2$ die Abbildungseigenschaften von P_2 genauer. Zunächst betrachten wir die vertikale Gerade

$$g_a = \{a + iy \mid y \in \mathbb{R}\} \quad \text{für festes } a \in \mathbb{R}.$$

Für eine Zahl $w = P_2(a + iy) = a^2 - y^2 + i2ay$ im Bild $P_2(g_a)$ erhalten wir $\operatorname{Re} w = a^2 - y^2$, also $0 \leq y^2 = a^2 - \operatorname{Re} w$, sowie

$$\operatorname{Im} w = 2ay = \pm 2a\sqrt{a^2 - \operatorname{Re} w}.$$

² $GL(2, \mathbb{C})$ ist die Gruppe der invertierbaren $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mit der Matrizenmultiplikation.

Also wird g_a durch P_2 auf die beiden Äste der nach links verlaufenden, zu $\mathbb{R}$ symmetrischen Parabel $\operatorname{Im} w = \pm 2a\sqrt{a^2 - \operatorname{Re} w}$ für $\operatorname{Re} w \leq a^2$ mit Scheitel $(a^2, 0)$ abgebildet. Dabei ist $P_2(G_0) = P_2(i\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\leq 0}$. Im Falle der horizontalen Geraden

$$h_b = \{x + ib \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{für festes } b \in \mathbb{R},$$

liegt $w = P_2(x + ib) = x^2 - b^2 + i2bx$ im Bild $P_2(h_b)$. Hier ergeben sich $\operatorname{Re} w = x^2 - b^2$, $0 \leq x^2 = \operatorname{Re} w + b^2$ und

$$\operatorname{Im} w = 2bx = \pm 2b\sqrt{b^2 + \operatorname{Re} w}.$$

Das Bild $P_2(h_b)$ ist also gleich den beiden Ästen der nach rechts verlaufenden Parabel $\operatorname{Im} w = \pm 2b\sqrt{b^2 + \operatorname{Re} w}$ für $\operatorname{Re} w \geq -b^2$ mit Scheitel $(-b^2, 0)$, wobei sich $P_2(H_0) = P_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$ ergibt.

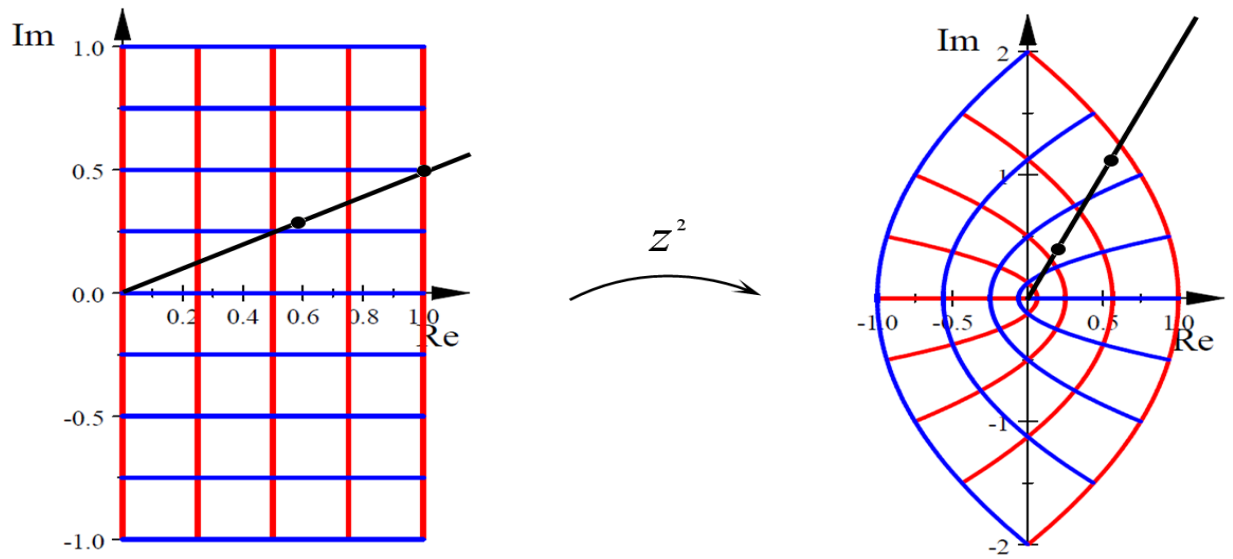


ABBILDUNG 1.2. Das Abbildungsverhalten der Quadratfunktion.

Wieder im Falle allgemeiner n , erklären wir nun die Wurzeln als Umkehrfunktionen geeigneter Einschränkungen von P_n .

DEFINITION 1.11. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Der Hauptzweig der n -ten Wurzel ist die Funktion $r_n = p_n^{-1} : \Sigma_\pi \rightarrow \Sigma_{\frac{\pi}{n}}$. Man schreibt $r_n(w) = w^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{w}$ für $w \in \Sigma_\pi$.

Somit ist für jedes $w \in \Sigma_\pi$ die n -te Wurzel $r_n(w) = z$ die einzige Zahl in $\Sigma_{\pi/n}$ mit $z^n = w$. Weiterhin gelten

$$r_n(z^n) = z \quad \text{und} \quad r_n(w)^n = w$$

für $z \in \Sigma_{\pi/n}$ bzw. $w \in \Sigma_\pi$. Wegen $p'_n(z) = nz^{n-1} \neq 0$, sind $p_n : \Sigma_{\pi/n} \rightarrow \Sigma_\pi$ und $r_n : \Sigma_\pi \rightarrow \Sigma_{\pi/n}$ biholomorph mit der Ableitung

$$r'_n(w) = \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{1}{nw^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}w^{\frac{1}{n}-1} \quad \text{für } w \in \Sigma_\pi,$$

siehe Satz 1.9. (Hier haben wir ein Potenzgesetz aus den Übungen verwendet.) Weiter genügt die Wurzel der Formel

$$r_n(te^{i\phi}) = \sqrt[n]{t} e^{i\phi/n} \quad \text{für } t > 0 \text{ und } \phi \in (-\pi, \pi),$$

da $(\sqrt[n]{t} e^{i\phi/n})^n = te^{i\phi}$ nach (1.3) gilt und $\sqrt[n]{t} e^{i\phi/n}$ in $\Sigma_{\pi/n}$ liegt.

Man kann auch andere Zweige der Wurzel definieren, um etwa Wurzeln aus negativen Zahlen zu ziehen. Dazu schlitzt man die Ebene an einem anderen Strahl als $\mathbb{R}_{\leq 0}$ oder man wählt einen gedrehten Sektor. Seien dafür $\beta \in [-\pi, \pi)$ und $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ gegeben. Wir setzen (auch für $\beta \in \mathbb{R}$)

$$E^\beta = \{te^{i\phi} \mid t > 0, \phi \in (\beta, \beta + 2\pi)\} = \mathbb{C} \setminus \overline{s_\beta},$$

$$W_n^{\beta,k} = \left\{te^{i\psi} \mid t > 0, \psi \in \left(\frac{\beta+2k\pi}{n}, \frac{\beta+2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right\}.$$

Wie oben sieht man ein, dass die Einschränkung $P_n : W_n^{\beta,k} \rightarrow E^\beta$ bijektiv ist. Somit erhalten wir die weiteren biholomorphen n -ten Wurzeln

$$r_n^{\beta,k} = (P_n|_{W_n^{\beta,k}})^{-1} : E^\beta \rightarrow W_n^{\beta,k}.$$

Für jedes $w \in E^\beta$ ist $z = r_n^{\beta,k}(w)$ die einzige Zahl in $W_n^{\beta,k}$ mit $z^n = w$. Wieder ergeben sich die Gleichungen

$$r_n^{\beta,k}(z^n) = z, \quad r_n^{\beta,k}(w)^n = w, \quad (r_n^{\beta,k})'(w) = \frac{1}{n} w^{\frac{1}{n}-1}, \quad r_n^{\beta,k}(w) = \sqrt[n]{t} e^{i(\phi+2k\pi)/n}$$

für $z \in W_n^{\beta,k}$ und $w \in E^\beta$ mit $w = te^{i\phi}$, $t > 0$ und $\beta < \phi < \beta + 2\pi$.

Beim Hauptzweig hatten wir $\beta = -\pi$ und $k = 0$ gewählt. Die Parameter β und k legen fest, aus welchen $w \neq 0$ man die n -te Wurzel ziehen kann, bzw. welches der n möglichen Urbilder $z \in \mathbb{C}$ mit $P_n(z) = w$ man auswählt.

Als Beispiel betrachten wir $n = 2$ und $\beta = -\pi/2$. Hier ist $E^\beta = \mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}_{\leq 0})$ und $w = -1$ hat die beiden Quadratwurzeln $r_2^{-\pi/2,0}(-1) = i$ und $r_2^{-\pi/2,1}(-1) = -i$.

C) Exponentialfunktion und Logarithmus. Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gelten nach (1.3) und Analysis 1 die Gleichungen

$$\begin{aligned} \exp(z) &= e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \\ \exp(z) &= \exp(z + 2\pi i k), \quad \exp(z) = 1 \iff z = 2\pi i k. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Für reelle a und b betrachten wir wieder die Geraden g_a und h_b , sowie den Strahl s_b aus Abschnitt B). Für $x, y \in \mathbb{R}$ liefern die Formeln (1.6) die Gleichungen

$$\exp(a + iy) = e^a (\cos y + i \sin y) \quad \text{und} \quad \exp(x + ib) = e^x e^{ib}.$$

Die reellen Eigenschaften von $\exp$, $\cos$ und $\sin$ implizieren nun die Aussagen

$$\begin{aligned} \exp : g_a &\rightarrow \partial B(0, e^a) \quad \text{ist surjektiv und nicht injektiv,} \\ \exp : h_b &\rightarrow s_b \quad \text{ist bijektiv.} \end{aligned}$$

Weiter verwenden wir die vertikalen und horizontalen Streifen

$$S_r(a_1, a_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in (a_1, a_2)\} \quad \text{bzw.} \quad S_i(b_1, b_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (b_1, b_2)\}$$

für $a_1 < a_2$ und $b_1 < b_2$ in $\overline{\mathbb{R}}$. Wegen der oben abgesetzten Abbildungseigenschaften von $\exp$ sind die Einschränkungen

$$\exp : S_r(a_1, a_2) \rightarrow B(0, e^{a_2}) \setminus \overline{B}(0, e^{a_1}) \quad \text{surjektiv und nicht injektiv,}$$

$$\exp : S_i(b_1, b_2) \rightarrow \{w = te^{i\phi} \mid t > 0, \phi \in (b_1, b_2)\} \quad \text{bijektiv,}$$

wobei $b_2 - b_1 \leq 2\pi$ gelte. Für $a_1 = -\infty$ bildet ferner $\exp$ die linke Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < a\}$ auf den punktierten Kreis $B(0, e^a) \setminus \{0\}$ ab. Um den Logarithmus einzuführen, verwenden wir speziell die Bijektivität von $\exp : S_i(-\pi, \pi) \rightarrow \Sigma_\pi$.

DEFINITION 1.12. Die Umkehrabbildung $\log = (\exp|_{S_i})^{-1} : \Sigma_\pi \rightarrow S_i$ nennen wir dem (Hauptzweig des) Logarithmus, wobei $S_i := S_i(-\pi, \pi)$ ist.

Für $w \in \Sigma_\pi$ ist somit $z = \log w$ die einzige Zahl in S_i mit $\exp(z) = w$. Weiter gelten

$$\log \exp(z) = z \quad \text{für } z \in S_i \quad \text{und} \quad \exp \log(w) = w \quad \text{für } w \in \Sigma_\pi.$$

Da $\exp'(z) = \exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist, liefert Satz 1.9 die Biholomorphie von $\exp : S_i \rightarrow \Sigma_\pi$ und $\log : \Sigma_\pi \rightarrow S_i$, sowie

$$\log'(w) = \frac{1}{\exp'(z)} = \frac{1}{\exp(z)} = \frac{1}{w} \quad \text{für } w \in \Sigma_\pi.$$

Seien $\beta \in [-\pi, \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ und $S_i^{\beta, k} := S_i(\beta + 2k\pi, \beta + 2(k+1)\pi)$. Der Zweig $\log_{\beta, k}$ des Logarithmus ist die Inverse der Einschränkung $\exp : S_i^{\beta, k} \rightarrow E^\beta$. Diese Zweige besitzen die entsprechenden Eigenschaften wie der Hauptzweig.

Sei $w = re^{i\phi}$ für $r > 0$ und $\phi \in (-\pi, \pi)$. Mit dem reellen Logarithmus $\ln$ erhalten wir die bequeme Formel

$$\log w = \ln r + i\phi, \tag{1.7}$$

da $\ln r + i\phi$ in S_i liegt und $\exp(\ln r + i\phi) = re^{i\phi}$ ist. Beispiele sind $\log r = \ln r$ für $r > 0$ und $\log i = i\frac{\pi}{2}$. Ferner sei $w = re^{i\phi} \in E^\beta$ für $r > 0$ und $\phi \in (\beta, \beta + 2\pi)$. Dann gilt $\log_{\beta, k} w = \ln r + i(\phi + 2k\pi) =: z$, da z in $S_i^{\beta, k}$ liegt und $\exp(z) = w$ ist.

Vorsicht. Die Formel (1.7) setzt voraus, dass ϕ in $(-\pi, \pi)$ liegt. Dies wird verletzt, wenn man etwa beim komplexen Multiplizieren den Schnitt $\mathbb{R}_{\leq 0}$ überschreitet. Deswegen gelten die Analoga der reellen Logarithmusgesetze in $\mathbb{C}$ nur eingeschränkt. Seien etwa $\phi, \psi \in (-\pi, \pi)$ mit $\phi + \psi > \pi$. Aus (1.3), (1.6) und (1.7) folgern wir

$$\log(e^{i\phi}e^{i\psi}) = \log e^{i(\phi+\psi-2\pi)} = i(\phi + \psi - 2\pi) \neq i(\phi + \psi) = \log e^{i\phi} + \log e^{i\psi}.$$

Mittels des Hauptzweig des Logarithmus führen wir die allgemeine Potenz ein.

DEFINITION 1.13. Seien $z = re^{i\phi} \in \Sigma_\pi$ mit $r > 0$ und $\phi \in (-\pi, \pi)$ und $w = x + iy \in \mathbb{C}$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Wir definieren die allgemeine Potenz durch

$$z^w = \exp(w \log z) = r^x e^{-y\phi} e^{i(x\phi + y \ln r)}.$$

Beispiele sind $e^w = \exp(w)$ für $z = e$ und $i^i = e^{-\pi/2}$. Wie schon beim Logarithmus ist zu beachten, dass die komplexe Potenz sich oft anders als im Reellen verhält.

Im Zweifelsfall muss man eben auf die Definition zurückgehen. Wir notieren einige wichtige Rechenregeln.

BEMERKUNG 1.14. Seien $z = re^{i\phi} \in \Sigma_\pi$ und $w, \tilde{w} \in \mathbb{C}$.

a) Für $w = n \in \mathbb{N}$ liefert Definition 1.13 die Gleichung $z^n = r^n e^{in\phi}$, was mit der elementaren Definition $z^n = z \cdot \dots \cdot z$ übereinstimmt.

b) Definition 1.13 und (1.3) implizieren das erste Potenzgesetz

$$z^{w+\tilde{w}} = \exp((w + \tilde{w}) \log z) = \exp(w \log z) \exp(\tilde{w} \log z) = z^w z^{\tilde{w}}.$$

Iterativ folgt daraus insbesondere $z = z^{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}} = (z^{\frac{1}{n}})^n$, sodass die Wurzeln $z^{\frac{1}{n}}$ aus den Definitionen 1.11 und 1.13 gleich sind. Die anderen beiden Potenzgesetze gelten nur eingeschränkt, vergleiche die Übungen.

c) Gemäß der Eigenschaften von $\exp$ und $\log$, der Kettenregel und Teil b) existieren die Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_z z^w &= \frac{d}{dz} \exp(w \log z) = \exp(w \log z) \frac{w}{z} = \frac{w z^w}{z} = w z^{w-1} \\ \partial_w z^w &= \frac{d}{dw} \exp(w \log z) = \exp(w \log z) \log z = \log(z) z^w. \end{aligned}$$

d) Wir erhalten aus Definition 1.13 die Abschätzung

$$|z^w| = r^x e^{-y\phi} = |z|^{\operatorname{Re} w} e^{-\operatorname{Im}(w) \arg(z)} \leq |z|^{\operatorname{Re} w} e^{\pi |\operatorname{Im}(w)|}.$$

Also kann der Imaginärteil von w zusätzliches Wachstum bewirken. $\diamond$

1.3. Komplexe Kurvenintegrale

In diesem Abschnitt übertragen wir einige Begriffe und Resultate aus Analysis 2 ins Komplexe. Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig*, wenn sie für jedes $t \in [a, b]$ links- und rechtsseitige Grenzwerte in $\mathbb{C}$ besitzt und bis auf höchstens endlich viele Punkte $t_k \in (a, b)$ stetig ist. Wir schreiben dann $f \in PC([a, b], \mathbb{C})$. Real- und Imaginärteil solcher Funktionen gehören zum analog definierten Raum $PC([a, b], \mathbb{R})$ aus Analysis 1 und sind nach Bemerkung 2.31 aus Analysis 3 integrierbar. Wir setzen nun

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re} f(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t) dt \in \mathbb{C}.$$

Dieses Integral besitzt die entsprechenden Eigenschaften wie im reellen Fall (außer der Monotonie), vergleiche Bemerkung 5.10 in Analysis 3.

Weiter nennen wir f bei $t_0 \in [a, b]$ *differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$f'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

in $\mathbb{C}$ existiert. Dies ist nach (1.2) dazu äquivalent, dass die Funktionen $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ in $\mathbb{R}$ Ableitungen besitzen. Weiter gelten $\operatorname{Re} f' = (\operatorname{Re} f)'$ und $\operatorname{Im} f' = (\operatorname{Im} f)'$.

Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ auf $[a, b]$ differenzierbar, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ und $g, f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann folgt aus den obigen Beobachtungen und dem Hauptsatz der (reellen) Integral- und Differentialrechnung seine komplexe Variante

$$\int_a^b f'(t) dt = \int_a^b u'(t) dt + i \int_a^b v'(t) dt = u \Big|_a^b + i v \Big|_a^b = f(b) - f(a), \quad (1.8)$$

$$\exists \frac{d}{dt} \int_a^t g(s) ds = \frac{d}{dt} \int_0^t \operatorname{Re} g(s) ds + i \frac{d}{dt} \int_0^t \operatorname{Im} g(s) ds = g(t). \quad (1.9)$$

für $t \in [a, b]$. Wir geben ein einfaches Beispiel an.

BEISPIEL 1.15. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $\int_a^b e^{zt} dt = \frac{1}{z} e^{zt} \Big|_{t=a}^b = \frac{1}{z} (e^{zb} - e^{za})$. $\diamond$

Im folgenden beschäftigen wir uns meist mit Kurvenintegralen. Dazu übertragen wir die Kurvendefinition aus $\mathbb{R}^2$ ins Komplexe.

DEFINITION 1.16. a) Eine Funktion $\gamma \in C([a, b], \mathbb{C})$ wird als Kurve oder Weg von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ bezeichnet. Sie heißt geschlossen, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist, und einfach, wenn γ auf $[a, b)$ injektiv ist. Das Bild (oder die Spur) von γ ist $\Gamma = \gamma([a, b])$, und γ eine Parametrisierung von Γ . Wenn $\Gamma \subseteq M$ ist, so nennt man γ Weg in $M \subseteq \mathbb{C}$.

b) Die Kurve $\gamma \in C([a, b], \mathbb{C})$ sei bis auf höchstens endlich viele $t_k \in (a, b)$ differenzierbar und bei den Stellen t_k noch links- und rechtsseitig ableitbar. Wir setzen $\gamma'(t_k)$ gleich der rechtsseitigen Ableitung. Weiter liege γ' in $PC([a, b], \mathbb{C})$. Dann heißt γ stückweise stetig differenzierbar (kurz: stückweise C^1).

Die folgenden einfachen Beispiele und Konstruktionen werden im folgenden häufig auftreten. Im ersten Punkt sieht man exemplarisch, dass die gleiche Spur viele Parametrisierungen besitzt.

BEISPIEL 1.17. a) Seien $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann parametrisiert $\gamma : [0, 2\pi n] \rightarrow \mathbb{C}$; $\gamma(t) = c + re^{it}$, die n -fach im Gegenuhrzeigersinn (positiv) durchlaufene Kreislinie $\Gamma = \partial B(c, r)$. Im Falle $n = 1$ identifizieren wir hier oft γ mit $\partial B(c, r)$.

b) Für $w, z \in \mathbb{C}$ parametrisiert $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$; $\gamma(t) = w + t(z - w)$, die Strecke $\overrightarrow{wz}$ von w nach z . Auch hier identifizieren wir meist γ mit seinem Bild $\overrightarrow{wz}$.

c) Seien $\gamma_k \in C([a_k, b_k], \mathbb{C})$ mit $b_1 = a_2$ und $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Der Summenweg von γ_1 und γ_2 ist

$$\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a_1, b_2] \rightarrow \mathbb{C}; \quad (\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(t), & a_1 \leq t \leq b_1, \\ \gamma_2(t), & a_2 < t \leq b_2. \end{cases}$$

(Man verwendet diese Schreibweise auch im Fall $b_1 < a_2$ ohne die Bedingung $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$.) Ein Beispiel ist der Dreiecksweg $\partial \Delta(z_1, z_2, z_3) = \overrightarrow{z_1 z_2} \cup \overrightarrow{z_2 z_3} \cup \overrightarrow{z_3 z_1}$.

d) Der Rückwärtsweg von $\gamma \in C([a, b], \mathbb{C})$ ist $\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$; $\gamma^-(t) = \gamma(b - t + a)$. $\diamond$

Im Folgenden sei γ stets ein stückweise stetig differenzierbarer Weg, dessen Ableitungen möglicherweise in endlich vielen Punkten $t_k \in (a, b)$ springen.

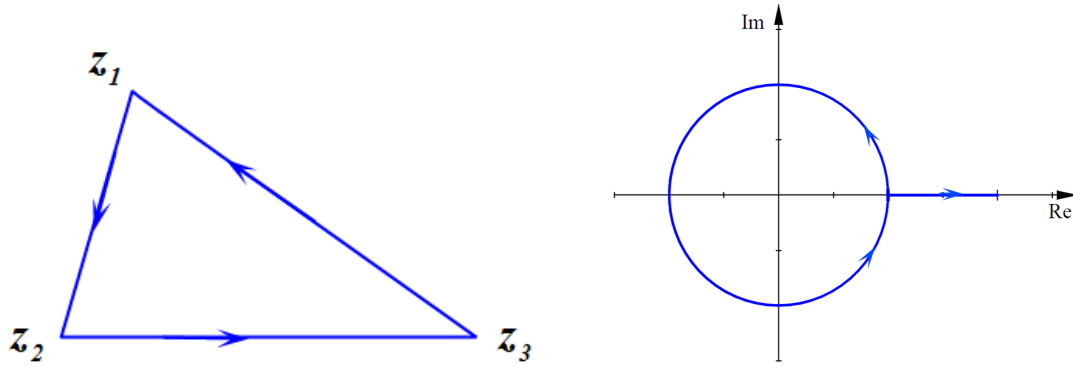


ABBILDUNG 1.3. Dreiecksweg und ein Kreis mit angefügter Strecke.

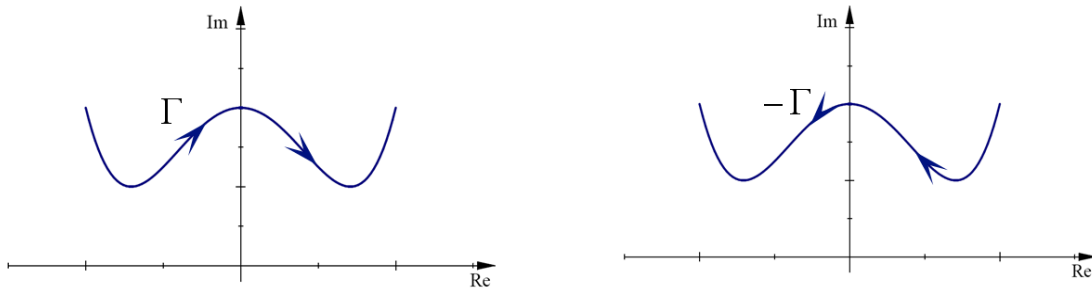


ABBILDUNG 1.4. Ein Rückwärtsweg.

DEFINITION 1.18. Seien $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise C^1 mit Bild $\Gamma = \gamma([a, b])$ und $f \in C(\Gamma, \mathbb{C})$. Dann definieren wir das komplexe Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} f \, dz = \int_{\gamma} f(z) \, dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt.$$

Die Länge der Kurve γ ist $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$. Wenn klar ist, was γ ist, schreiben wir auch $\int_{\Gamma} f \, dz$ statt $\int_{\gamma} f \, dz$.

Man kann das obige Integral mit dem Kurvenintegral aus Analysis 2 in Beziehung setzen. Seien dazu $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, $\varphi = \operatorname{Re} \gamma$ und $\psi = \operatorname{Im} \gamma$ für f und γ aus Definition 1.18. Dann folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f \, dz &= \int_a^b \left((u \circ \gamma) \varphi' - (v \circ \gamma) \psi' \right) dt + i \int_a^b \left((u \circ \gamma) \psi' + (v \circ \gamma) \varphi' \right) dt \\ &= \int_{\gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot d(x, y) + i \int_{\gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot d(x, y). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Wie in Bemerkung 4.7 aus Analysis 2 folgern wir die Rechenregeln für das komplexe Kurvenintegral leicht aus den Eigenschaften des Integrals über Intervallen.

BEMERKUNG 1.19. Es seien $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, γ_1 und γ_2 stückweise C^1 -Kurven mit Bildern Γ , Γ_1 bzw. Γ_2 , $f, g \in C(\Gamma, \mathbb{C})$, $h \in C(\Gamma_1 \cup \Gamma_2, \mathbb{C})$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

- a) $\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) dz = \alpha \int_{\gamma} f dz + \beta \int_{\gamma} g dz.$
- b) $\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq \|f\|_{\infty} \ell(\gamma).$
- c) $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} h dz = \int_{\gamma_1} h dz + \int_{\gamma_2} h dz.$
- d) $\int_{\gamma^-} f dz = - \int_{\gamma} f dz.$
- e) Sei $\phi \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ strikt wachsend und $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \phi^{-1}$. Dann ist $\tilde{\gamma}$ stückweise C^1 und es gilt $\int_{\tilde{\gamma}} f dz = \int_{\gamma} f dz.$ $\diamond$

Wir können nun einige Integrale mittels der Definition und dem Hauptsatz berechnen. Das erste Beispiel ist dabei zentral für die folgende Theorie.

BEISPIEL 1.20. a) Seien $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $k \in \mathbb{Z}$ und $\gamma(t) = c + re^{it}$ für $0 \leq t \leq 2\pi n$. Dann erhalten wir für $k \neq -1$

$$\int_{\gamma} (z - c)^k dz = \int_0^{2\pi n} (\gamma(t) - c)^k \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi n} r^k e^{kit} i r e^{it} dt = \frac{r^{k+1}}{k+1} e^{(k+1)it} \Big|_0^{2\pi n} = 0.$$

Für $k = -1$ ergibt sich allerdings

$$\int_{\gamma} (z - c)^{-1} dz = \int_0^{2\pi n} r^{-1} e^{-it} i r e^{it} dt = 2\pi i n.$$

b) Seien $w \in \Sigma_{\pi}$ und $\gamma(t) = tw$ für $0 \leq t \leq 1$. Die Funktion $f : \overrightarrow{0w} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = z^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}}$, mit $f(0) = 0$ ist stetig. Es gilt

$$\int_{\gamma} z^{\frac{1}{2}} dz = \int_0^1 f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} w^{\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{3} w^{\frac{3}{2}}. \quad \diamond$$

Das Kurvenintegral erbt die Grenzwertsätze des gewöhnlichen Integrals, wobei wir uns hier auf das nachfolgend Benötigte beschränken.

SATZ 1.21. Seien γ stückweise C^1 mit Bild Γ , $f_n, f \in C(\Gamma, \mathbb{C})$ für $n \in \mathbb{N}$ und $h \in C(D \times \Gamma, \mathbb{C})$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

a) Die Folge (f_n) konvergiere gleichmäßig auf Γ gegen f . Dann erhalten wir

$$\int_{\gamma} f_n dz \longrightarrow \int_{\gamma} f dz, \quad n \rightarrow +\infty.$$

b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiere gleichmäßig auf Γ . Dann konvergiert auch

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\gamma} f_n dz = \int_{\gamma} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n dz.$$

c) Wir haben die Stetigkeit der Abbildung

$$H : D \rightarrow \mathbb{C}; \quad z \mapsto \int_{\Gamma} h(z, w) dw.$$

d) Die Funktion $D \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto h(z, w)$, sei holomorph mit $\partial_z h \in C(D \times \Gamma, \mathbb{C})$. Dann ist H aus Teil c) holomorph mit der Ableitung

$$\frac{d}{dz} \int_{\gamma} h(z, w) dw = \int_{\gamma} \partial_z h(z, w) dw.$$

BEWEIS. Bemerkung 1.19 impliziert leicht Aussage a) durch

$$\left| \int_{\gamma} f_n dz - \int_{\gamma} f dz \right| = \left| \int_{\gamma} (f_n - f) dz \right| \leq \|f - f_n\|_{\infty} \ell(\gamma) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Indem wir dies auf die Funktionen $g_N := \sum_{n=1}^N f_n$ anwenden, zeigen wir Teil b).

Um die Aussagen c) und d) zu beweisen, wählen wir einen Punkt $z_0 \in D$ und einen Radius $r > 0$ mit $\overline{B}(z_0, r) \subseteq D$. Wir setzen $B = B(z_0, r)$ und $\varphi(z, t) = h(z, \gamma(t))\gamma'(t)$ für $z \in \overline{B}$ und $t \in [a, b]$. Dann gilt

$$|\varphi(z, t)| \leq \max_{\overline{B} \times \Gamma} |h| \max_{[a, b]} |\gamma'| =: M < +\infty,$$

wobei die Majorante $M \mathbb{1}_{[a, b]}$ integrierbar ist. Da $z_0 \in D$ beliebig ist, folgt c) aus Theorem 3.16 in Analysis 3 angewendet auf φ . Weil in d) auch $\partial_z h$ auf $\overline{B} \times \Gamma$ beschränkt ist, liefert Theorem 3.18 aus Analysis 3 die reelle partielle Differenzierbarkeit von H und z.B.

$$\partial_x \operatorname{Re} H(z, x) = \int_a^b \partial_x \operatorname{Re} \varphi(z, t) dt.$$

Weiter ergibt sich aus Teil c) die Stetigkeit der partiellen Ableitungen, sodass H auch reell differenzierbar ist (siehe Theorem 3.13 in Analysis 2). Für festes t können wir nun die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen (1.4) aus Satz 1.5 anwenden und erhalten die Identität $\partial_x \operatorname{Re} \varphi(z, t) = \partial_y \operatorname{Im} \varphi(z, t)$. Also ist $\partial_x \operatorname{Re} H = \partial_y \operatorname{Im} H$. Die andere Gleichung in (1.4) beweist man analog. Satz 1.5 impliziert dann die Holomorphie von H und die Formel in Behauptung d). $\square$

Für die folgenden Betrachtungen erinnern wir an einige Begriffe aus der Analysis 2. Nach Definition 2.56 aus Analysis 2 heißt eine Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ *wegzusammenhängend*, wenn es für alle Punkte $w, z \in M$ einen stetigen Weg γ in M von w nach z gibt. Beispiele hierfür sind *konvexe* M (bei denen zu je zwei Punkten aus M auch die Verbindungsstrecke in M liegt) oder allgemeiner *sternförmige* M (bei denen es so ein *Zentrum* $z_0 \in M$ gibt, dass für jedes $z \in M$ die Strecke $\overrightarrow{z_0 z}$ in M liegt). Ein Sektor Σ_{θ} ist konvex für $\theta \in (0, \pi/2]$ und sternförmig für $\theta \in (0, \pi]$. Die folgenden Bilder veranschaulichen diese Konzepte. Eine offene und wegzusammenhängende Menge in $\mathbb{C}$ heißt *Gebiet*.

Der Wegzusammenhang geht später meist durch den folgenden Satz ein.

SATZ 1.22. Sei $f \in H(D)$ mit $f' = 0$ und $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist f konstant.

BEWEIS. Seien $z, z' \in D$. Die Voraussetzung und Lemma 4.12 in Analysis 2 liefern einen Streckenzug γ in D von $z = \gamma(t_0)$ nach $z' = \gamma(t_n)$ mit (eventuellen)

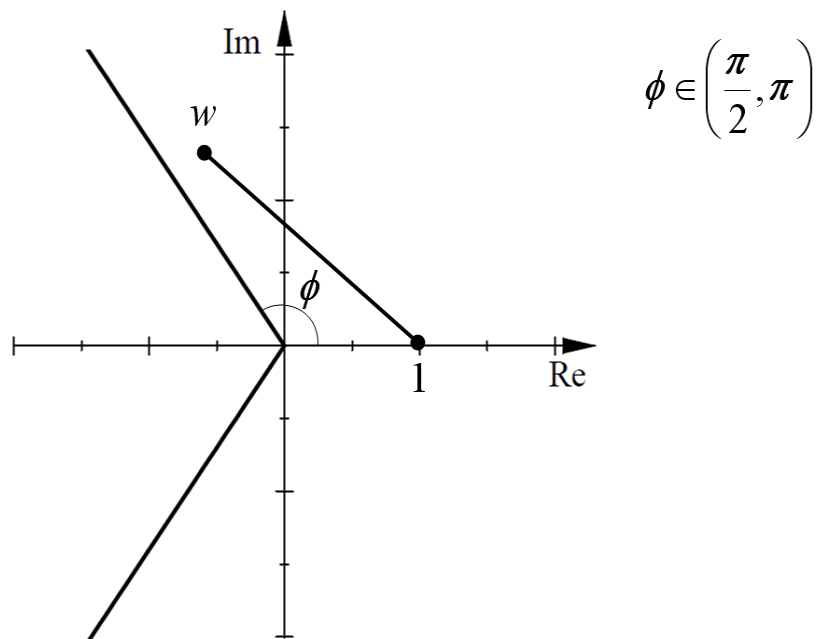
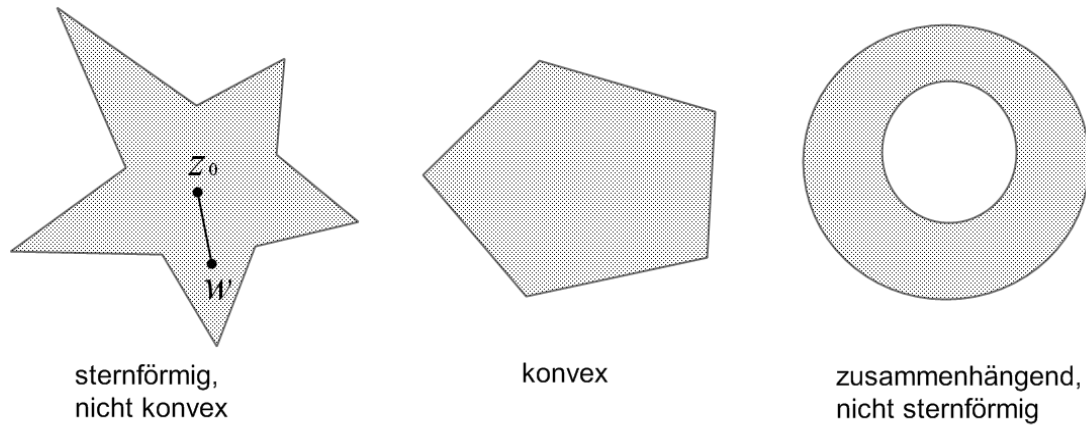


ABBILDUNG 1.5. Sektoren sind sternförmig

Knickstellen $z_k = \gamma(t_k)$. Die Kettenregel und der Hauptsatz (1.8) implizieren

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\gamma} f'(w) \, dw = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f'(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \, dt \\
 &= \sum_{j=1}^n f(\gamma(t_k)) - f(\gamma(t_{j-1})) = f(z') - f(z). \quad \square
 \end{aligned}$$

Auf der nicht wegzusammenhängenden offenen Menge $B(0, 1) \cup B(3, 1)$ ist die Funktion $f = \mathbb{1}_{B(0,1)}$ trotz verschwindender Ableitung nicht konstant.

Wir führen ein weiteres Konzept ein, mit dem wir einige der Hauptsätze allgemeiner und eleganter formulieren können.³ Sei γ ein geschlossener stückweiser C^1 -Weg in $\mathbb{C}$ mit Bild Γ . Für $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ definieren wir die *Windungszahl* (oder den *Index*) von γ bzgl. z durch

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z}. \quad (1.11)$$

Für jeden n -fach durchlaufenen Kreis γ um z gilt $n(\gamma, z) = n$ laut Beispiel 1.20, wobei $n \in \mathbb{Z}$ ist und $n < 0$ Umläufe im Umzeigersinn bedeuten.

In Ergänzung zu Analysis 2 erwähnen wir, dass es disjunkte, wegzusammenhängende Gebiete $G_j \subseteq \mathbb{C}$ mit $j \in J \subseteq \mathbb{N}$ gibt, deren Vereinigung gleich $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ ist und deren Ränder ∂G_j alle in Γ liegen. Man nennt die Mengen G_j *Zusammenhangskomponenten* von $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Dabei ist genau eine Zusammenhangskomponente $G_i =: G_{\infty}$ von $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ unbeschränkt. Vergleiche Abschnitt 0.6.4 in [7]. Wir zeigen nun grundlegende Rechenregeln für den Index, siehe auch Korollar 2.34.

LEMMA 1.23. Sei γ, γ_1 und γ_2 geschlossene, stückweise C^1 -Wege in $\mathbb{C}$ mit Bildern Γ, Γ_1 bzw. Γ_2 . Die Windungszahl hat die folgenden Eigenschaften.

- a) $\mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto n(\gamma, z)$, ist stetig und $n(\gamma, z)$ ist ganzzahlig für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$.
- b) $z \mapsto n(\gamma, z)$ ist konstant auf jedem G_j .
- c) $n(\gamma, z) = 0$ für alle $z \in G_{\infty}$.
- d) $n(\gamma^-, z) = -n(\gamma, z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$.
- e) $n(\gamma_1 \cup \gamma_2, z) = n(\gamma_1, z) + n(\gamma_2, z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

BEWEIS. a) Die Stetigkeit von $z \mapsto n(\gamma, z)$ folgt aus Satz 1.21 c) mit $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Um $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ zu zeigen, wählen wir $t_k \in (a, b)$ mit $k \in \{1, \dots, m-1\}$ wie in Definition 1.16 und setzen

$$\varphi(t) = \exp \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds \quad \text{für } t_0 := a \leq t \leq b =: t_m.$$

Wegen (1.6) und (1.11) ist die Behauptung äquivalent zu der Identität

$$1 = \exp(2\pi i n(\gamma, z)) = \exp \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z} = \varphi(b).$$

Weil $\varphi(a) = 1$ ist, wollen wir $\varphi(t_{k-1})$ und $\varphi(t_k)$ in Beziehung setzen. Hierfür verwenden wir die stetige Differenzierbarkeit von φ auf $[t_{k-1}, t_k]$ mit $\varphi' = \varphi \gamma' / (\gamma - z)$. Daraus ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z} = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} = 0$$

³Das Material bis einschließlich Bemerkung 1.25 wurde in der Vorlesung lediglich an anderer Stelle kurz erwähnt.

für $t \in [t_{k-1}, t_k]$ und $k \in \{1, \dots, m\}$. Mittels (1.8) erhalten wir

$$\frac{\varphi(t_k)}{\gamma(t_k) - z} = \frac{\varphi(t_{k-1})}{\gamma(t_{k-1}) - z}$$

und damit

$$\begin{aligned} \varphi(b) &= \varphi(t_{m-1}) \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(t_{m-1}) - z} = \varphi(t_{m-2}) \frac{\gamma(t_{m-1}) - z}{\gamma(t_{m-2}) - z} \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(t_{m-1}) - z} \\ &= \varphi(t_{m-2}) \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(t_{m-2}) - z} = \dots = \varphi(a) \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(a) - z} = \varphi(a) = 1. \end{aligned}$$

b)-e) Nach Theorem 2.58 in Analysis 2 ist das stetige Bild $n(\gamma, G_j)$ wegzusammenhängend in $\mathbb{C}$. Als Teilmenge von $\mathbb{Z}$ muss $n(\gamma, G_j)$ somit einpunktig sein. Für $z \in G_\infty$ liefern (1.11) und Bemerkung 1.19 die Konvergenz

$$|n(\gamma, z)| \leq \frac{\ell(\gamma)}{2\pi} \max_{w \in \Gamma} \frac{1}{|w - z|} \rightarrow 0$$

für $|z| \rightarrow \infty$. Behauptung b) impliziert dann $n(\gamma, z) = 0$. Die Aussagen d) und e) folgen unmittelbar aus Bemerkung 1.19. $\square$

BEISPIEL 1.24. Sei γ der n -fach durchlaufenene Kreis $\partial B(z_0, r)$. Aus Beispiel 1.20 und den Aussagen b) und c) des obigen Lemmas ergeben sich $n(\gamma, z) = n$ für $z \in B(z_0, r)$ und $n(\gamma, z) = 0$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}(z_0, r)$. $\diamond$

Die folgende Bemerkung ermöglicht es, die Windungszahl einfach graphisch zu bestimmen.

BEMERKUNG 1.25. Seien γ ein geschlossener stückweiser C^1 -Weg mit Bild Γ und $z \in D := \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Der Halbstrahl L werde durch $z + te^{i\phi}$ für $t \geq 0$ und ein festes $\phi \in [-\pi, \pi)$ parametrisiert. Er schneide Γ nur endlich oft in $\gamma(\tau_1), \dots, \gamma(\tau_n)$, wobei Berührungspunkte nicht gezählt werden. (Bei denen bleibt Γ auf einer Seite von L .) Wir zählen einen Schnittpunkt positiv, falls $\gamma(t)$ mit wachsenden Argument und damit im Gegenuhrzeigersinn L schneidet, und sonst negativ. Dann ist $n(\gamma, z)$ gleich der so gewichteten Anzahl der Schnittpunkte, und somit gleich der Anzahl der positiven Umläufe minus der Anzahl der negativen Umläufe von γ um z .

Um dies zu zeigen, können wir nach Verschiebung und Rotation annehmen, dass $z = 0 \notin \Gamma$, $L = \mathbb{R}_{\leq 0}$ und alle τ_k ungleich a und b sind. Wir nehmen ferner der Einfachheit halber an, dass γ in $C^1([a, b], \mathbb{C})$ liegt. Dann gibt es so eine Zahl $\varepsilon > 0$, dass alle Intervalle $(\tau_k - \varepsilon, \tau_k + \varepsilon)$ in (a, b) enthalten und paarweise disjunkt sind. Sei I_ε die Vereinigung dieser Intervalle. Die Einschränkung von γ auf $[a, b] \setminus I_\varepsilon$ parametrisiert eine disjunkte Vereinigung von Kurven in Σ_π . Mittels (1.8) und (1.7) berechnen wir

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - 0} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{[a, b] \setminus I_\varepsilon} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{[a, b] \setminus I_\varepsilon} (\log \gamma(t))' dt$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \left(\log \gamma(b) - \log \gamma(\tau_n + \varepsilon) + \log \gamma(\tau_n - \varepsilon) - \log \gamma(\tau_{n-1} + \varepsilon) \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \log \gamma(\tau_1 + \varepsilon) - \log \gamma(a) \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \left[\ln |\gamma(\tau_k - \varepsilon)| - \ln |\gamma(\tau_k + \varepsilon)| + i(\arg \gamma(\tau_k - \varepsilon) - \arg \gamma(\tau_k + \varepsilon)) \right].
\end{aligned}$$

Hier verschwinden die Differenzen mit $\ln$ im Limes. Die anderen Terme ergeben $\pi - (-\pi) = 2\pi$, wenn γ den Strahl L im Gegenuhreigersinn schneidet, und andernfalls $-\pi - \pi = -2\pi$. (Bei einem Berührungspunkt erhielte man 0.) $\diamond$

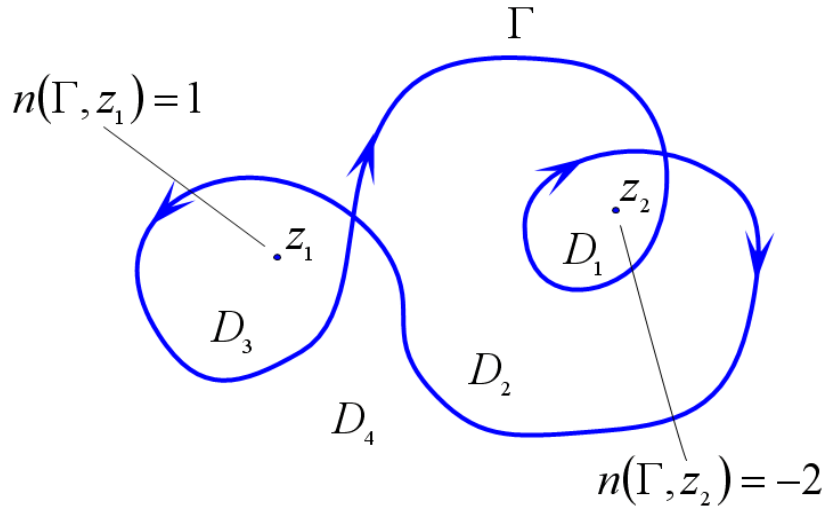


ABBILDUNG 1.6. Graphische Bestimmung der Windungszahl

KAPITEL 2

Der Cauchysche Integralsatz und seine Folgerungen

In diesem Kapitel zeigen wir zahlreiche Hauptsätze der komplexen Analysis, die alle aus Cauchys Integralsatz folgen werden.

2.1. Cauchys Integralsatz und -formel

Wir charakterisieren zunächst wie in Analysis 2 die Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen. Dazu übertragen wir den Begriff der Stammfunktion ins Komplexe.

DEFINITION 2.1. Sei $f \in C(D, \mathbb{C})$. Eine Stammfunktion von f auf D ist eine Abbildung $F \in H(D)$ mit $F' = f$.

Die Abbildungen $\exp$, $\sin$, $\cos$ und die Polynome besitzen die bekannten Stammfunktionen auf $\mathbb{C}$. Die Funktion $f : \Sigma_\pi \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = \frac{1}{z}$, hat die Stammfunktion $\log$ auf Σ_π , siehe aber Beispiel 2.4 c) unten. Die folgenden Eigenschaften gelten wie im Reellen, wo wir stets auf Intervallen gearbeitet haben (die ja konvex sind).

BEMERKUNG 2.2. Eine Funktion $f \in C(D, \mathbb{C})$ besitze eine Stammfunktion F . Dann ist auch $F_c := F + c$ für jedes $c \in \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f . Sei $\tilde{F}$ eine weitere Stammfunktion von f und D ein Gebiet. Dann verschwindet die Ableitung $(\tilde{F} - F)' = f - f = 0$. Satz 1.22 liefert nun eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ mit $\tilde{F} = F + c$. $\diamond$

Wir können wie in Satz 4.11 aus Analysis 2 die Existenz einer Stammfunktion von f durch die Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen über f charakterisieren.

SATZ 2.3. Seien D ein Gebiet und $f \in C(D, \mathbb{C})$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- a) Die Abbildung f hat eine Stammfunktion F auf D .
- b) Für alle stückweisen C^1 -Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow D$ mit $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ und $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ gilt die Gleichung

$$\int_{\gamma_1} f \, dz = \int_{\gamma_2} f \, dz.$$

- c) Für jeden geschlossenen stückweisen C^1 -Weg γ in D ist

$$\int_{\gamma} f \, dz = 0.$$

Für jeden stückweisen C^1 -Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ erhalten wir in diesem Fall die Formel

$$\int_{\gamma} f \, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

BEWEIS. 1)¹ Es gelte Aussage a) und γ sei stückweise C^1 in D mit möglichen Sprungstellen $t_k \in (a, b)$, wobei $a =: t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n := b$ ist. Dann liefert die Kettenregel und der Hauptsatz (1.8) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f \, dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \, dt \\ &= \sum_{k=1}^n \left(F(\gamma(t_k)) - F(\gamma(t_{k-1})) \right) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Also folgt der Zusatz und, falls $\gamma(b) = \gamma(a)$ ist, auch Teil c).

2) Es gelte Behauptung c). Es seien γ_1 und γ_2 stückweise C^1 -Kurven wie in b). Dann ist $\gamma := \gamma_1 \cup \gamma_2^-$ eine geschlossene stückweise C^1 -Kurve in D . Teil c) und Bemerkung 1.19 liefern dann

$$0 = \int_{\gamma} f \, dz = \int_{\gamma_1} f \, dz - \int_{\gamma_2} f \, dz,$$

woraus Aussage b) folgt.

3) Es gelte Teil b). Sei $z_0 \in D$ fest gewählt und $z \in D$ beliebig. Nach Lemma 4.12 in Analysis 2 gibt es einen Streckenzug γ_z in D von z_0 nach z . Wir definieren

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f \, dw.$$

Wähle einen Radius $r > 0$ mit $\overline{B}(z, r) \subseteq D$. Sei $h \in B(0, r) \setminus \{0\}$. Dann sind $\gamma_z^- \cup \gamma_{z+h}$ und $l_h := \overrightarrow{z, z+h}$ Wege in D von z nach $z+h$. Mit Bemerkung 1.19 und Aussage b) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (F(z+h) - F(z)) &= \frac{1}{h} \left(\int_{\gamma_{z+h}} f \, dw - \int_{\gamma_z} f \, dw \right) = \frac{1}{h} \int_{\gamma_z^- \cup \gamma_{z+h}} f \, dz \\ &= \frac{1}{h} \int_{l_h} f \, dw = \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th) h \, dt = \int_0^1 f(z+th) \, dt =: J_h \end{aligned}$$

Wir wenden nun Satz 1.21 auf die Integranden $f_n(t) = f(z+th_n)$ und eine Nullfolge (h_n) in $B(0, r) \setminus \{0\}$ an. Da f auf $\overline{B}(z, r)$ gleichmäßig stetig ist, konvergieren f_n gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen die konstante Funktion $t \mapsto f(z)$. Also strebt J_h gegen $\int_0^1 f(z) \, dt = f(z)$, und Behauptung a) gilt. $\square$

Wie in Analysis 1 erlaubt also die Kenntnis einer Stammfunktion die Berechnung von Kurvenintegralen. (Nur ist es im Komplexen schwieriger, Stammfunktionen zu finden.) Das letzte der nächsten Beispiele ist von zentraler Bedeutung in der folgenden Theorie.

BEISPIEL 2.4. a) Sei γ eine stückweiser C^1 -Weg in $\mathbb{C}$ von z_1 nach z_2 . Dann gilt $\int_{\gamma} \cos z \, dz = \sin(z_2) - \sin(z_1)$.

¹Der Beweis wurde in der Vorlesung ausgelassen.

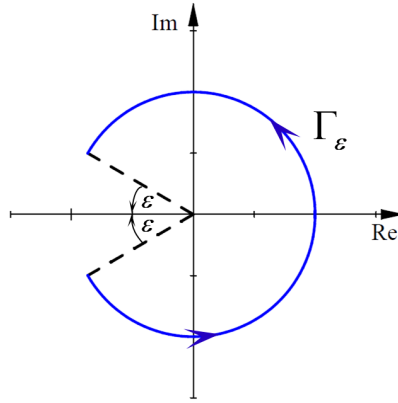


ABBILDUNG 2.1. Ein Weg für Beispiel 2.4 b).

b) Sei $\varepsilon \in (0, \pi)$ und γ_ε ein stückweiser C^1 -Weg von $z_- = e^{i(-\pi+\varepsilon)}$ nach $z_+ = e^{i(\pi-\varepsilon)}$ in Σ_π . Dann erhalten wir mittels (1.7) die Gleichung

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z} = \log(z) \Big|_{z_-}^{z_+} = 2\pi i - 2\varepsilon i.$$

c) Für $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, gilt $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$ nach Beispiel 1.20, sodass $f(z) = \frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ wegen Satz 2.3 keine Stammfunktion besitzen kann. $\diamond$

Wir zeigen zunächst Cauchys Integralsatz für Dreieckswege, wobei man (in Hinblick auf den Beweis von Cauchys Integralformel) die Holomorphie leicht abschwächt. Im von uns gewählten Standardzugang zu Cauchys Sätzen ist dieser *Satz von Goursat* der aufwändigste Teil der Beweise.

SATZ 2.5. Seien $w_0 \in D$ und $f \in C(D, \mathbb{C}) \cap H(D \setminus \{w_0\})$. Sei $\Delta \subseteq D$ ein abgeschlossenes Dreieck und $\partial\Delta$ wie in Beispiel 1.17 parametrisiert. Dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} f \, dz = 0.$$

BEWEIS. Der Satz gilt, wenn Δ keine inneren Punkte hat. Sei also $\Delta^\circ \neq \emptyset$.

1) Zunächst liege w_0 nicht in Δ . Wir beginnen mit einem Zerlegungsargument.

a) Die Ecken von Δ bezeichnen wir mit a, b und c , sowie mit ab die Seite zwischen a und b usw. Weiter schreiben wir c' für die Mitte von ab , b' für die von ac und a' für die von bc . Wir erhalten so die vier Teildreiecke

$$\Delta'_1 = \Delta(a, c', b'), \quad \Delta'_2 = \Delta(c', b, a'), \quad \Delta'_3 = \Delta(a', c, b'), \quad \Delta'_4 = \Delta(b', c', a'),$$

die alle positiv orientiert seien. Die neu hinzugekommen Seiten im Innern werden dabei je zweimal entgegengesetzt und die Seiten von Δ je einmal positiv durchlaufen. Somit gilt

$$J := \int_{\partial\Delta} f \, dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial\Delta'_k} f \, dz.$$

Sei J_1 ein Integral aus dieser Summe mit dem größtem Betrag und Δ_1 das zugehörige Dreieck. Diese genügen den Beziehungen

$$|J_1| \geq \frac{1}{4} |J| \quad \text{und} \quad \ell(\partial\Delta_1) = \frac{1}{2} \ell(\partial\Delta).$$

Wir iterieren dieses Vorgehen und gewinnen auf diese Weise ineinander enthaltene Dreiecke Δ_n und Integrale $J_n = \int_{\partial\Delta_n} f \, dz$ mit

$$|J_n| \geq 4^{-n} |J| \quad \text{und} \quad |z - w| \leq \ell(\partial\Delta_n) = 2^{-n} \ell(\partial\Delta) \quad (2.1)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z, w \in \Delta_n$. Somit ist die Folge der Mittelpunkte z_n von Δ_n eine Cauchyfolge. Sei z_0 ihr Grenzwert, der ein Element von $\bigcap_n \Delta_n \subseteq \Delta$ ist.

b) Da Δ kompakt ist, liefert Korollar 2.52 in Analysis 2 die Ungleichung

$$\delta = \text{dist}(\Delta, \partial D \cup \{w_0\}) := \inf_{z \in \Delta, w \in \partial D \cup \{w_0\}} |z - w| > 0.$$

Damit ist die Menge $U = \bigcup_{z \in \Delta} B(z, \delta/2)$ in $D \setminus \{w_0\}$ enthalten, und sie ist nach Satz 2.20 aus Analysis 2 offen.

Da f auf U komplex differenzierbar ist, konvergiert die Differenz

$$g(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \longrightarrow 0$$

für $z \rightarrow z_0$ in U . Wir integrieren die Gleichung

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z)(z - z_0)$$

über $\partial\Delta_n$ und erhalten

$$J_n = \int_{\partial\Delta_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)) \, dz + \int_{\partial\Delta_n} g(z)(z - z_0) \, dz.$$

Das erste Integral verschwindet hierbei nach Satz 2.3, weil der Integrand als Polynom eine Stammfunktion besitzt. Damit haben wir auf den stark verkürzten Wegen den Integranden deutlich verkleinert. Die Ungleichungen in (2.1) liefern nun

$$\begin{aligned} 4^{-n} |J| &\leq |J_n| = \left| \int_{\partial\Delta_n} g(z)(z - z_0) \, dz \right| \\ &\leq \ell(\partial\Delta_n) \max_{z \in \Delta_n} |g(z)(z - z_0)| \leq (2^{-n} \ell(\partial\Delta))^2 \max_{z \in \Delta_n} |g(z)|, \\ |J| &\leq \ell(\partial\Delta)^2 \max_{z \in \Delta_n} |g(z)|. \end{aligned}$$

Nun strebt die rechte Seite für $n \rightarrow +\infty$ gegen 0, sodass wie behauptet $J = 0$ ist.

2) Sei nun $w_0 \in \Delta$. Wir führen diesen Fall in drei Schritten auf Teil 1) zurück.

a) Sei w_0 zuerst eine Ecke von Δ . Wähle $\varepsilon > 0$. Durch iteriertes Seitenhalbieren wie in Schritt 1a) erhalten wir abgeschlossene Dreiecke $\Delta_1^*, \dots, \Delta_n^*$ mit disjunktem Inneren, von denen nur Δ_1^* den Punkt w_0 enthält, deren Vereinigung gleich Δ ist

und deren (positiv orientierter) Rand jeweils eine Länge kleiner als ε hat. Wie oben zerfällt J in die Teilintegrale über $\partial\Delta_j^*$, und wir erhalten

$$J = \sum_{j=1}^n \int_{\partial\Delta_j^*} f \, dz = \int_{\partial\Delta_1^*} f \, dz,$$

wobei wir Schritt 1) auf die Terme mit $j \geq 2$ angewendet haben. Daraus folgt die Ungleichung

$$|J| \leq \varepsilon \max_{\Delta} |f|$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und damit $J = 0$.

b) Der Punkt w_0 liege im Inneren einer Seite von Δ . Dann zerlegen wir Δ mit der Verbindungsstrecke zwischen w_0 und der gegenüberliegenden Ecke von Δ . Wie in Schritt 1a) ist J gleich der Summe der Kurvenintegrale J^1 und J^2 von f über die Ränder der beiden Teildreiecke. Teil a) liefert nun $J^1 = 0 = J^2$.

c) Sei schließlich w_0 im Inneren von Δ . Nun zerlegen wir das Dreieck durch die Verbindungsstrecken von w_0 zu den Ecken in vier Teildreiecke Δ^j . Wieder ist J gleich der Summe der Integrale von f über $\partial\Delta^j$. Diese verschwinden gemäß Schritt a), sodass $J = 0$ ist. $\square$

Der folgende *Integralsatz von Cauchy* ist die Grundlage der Funktionentheorie. Da Kugeln konvex sind, liefert dieses Theorem für jede holomorphe Funktion f die Wegunabhängigkeit von Integralen über Kurven, die innerhalb einer Kugel in D verlaufen. Demnach besitzt f lokal eine Stammfunktion. (Das reelle Analogon benötigt eine Zusatzannahme an $f \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$, siehe Theorem 4.15 in Analysis 2.) Für eine globale Aussage auf D muss das Gebiet jedoch einer ‘topologischen’ Bedingung genügen, siehe das Beispiel unten.

THEOREM 2.6. *Seien D ein sternförmiges Gebiet, $f \in H(D)$ und γ eine geschlossene stückweise C^1 -Kurve in D . Dann gilt*

$$\int_{\gamma} f \, dz = 0.$$

Somit besitzt f eine Stammfunktion auf D .

BEWEIS. Nach Satz 2.3 ist nur der Zusatz zu zeigen. Sei dazu z_0 das Zentrum von D . Für $z \in D$ liegt nach Voraussetzung die Strecke $\overrightarrow{z_0 z}$ in D . Wir setzen

$$F(z) = \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f \, dz = - \int_{\overrightarrow{z z_0}} f \, dz,$$

wobei wir Bemerkung 1.19 verwendet haben. Wir wählen einen Radius $r > 0$ mit $B(z, r) \subseteq D$. Sei $h \in B(0, r) \setminus \{0\}$. Dann liegt die Strecke $\overrightarrow{z, z+h}$ in D und damit auch das Dreieck $\Delta := \Delta(z_0, z+h, z)$. Mittels Bemerkung 1.19 berechnen wir nun

$$\frac{1}{h}(F(z+h) - F(z)) = \frac{1}{h} \left(\int_{\overrightarrow{z_0, z+h}} f \, dz + \int_{\overrightarrow{z z_0}} f \, dz + \int_{\overrightarrow{z+h, z}} f \, dz \right) + \frac{1}{h} \int_{\overrightarrow{z, z+h}} f \, dz$$

$$= \frac{1}{h} \int_{\partial\Delta} f \, dz + \frac{1}{h} \int_{\overrightarrow{z, z+h}} f \, dz = \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th) h \, dt = \int_0^1 f(z+th) \, dt.$$

wobei das Integral über $\partial\Delta$ laut Satz 2.5 verschwindet. Weiter gilt

$$\left| \int_0^1 f(z+th) \, dt - f(z) \right| \leq \int_0^1 |f(z+th) - f(z)| \, dt \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |f(z+th) - f(z)| \rightarrow 0$$

für $h \rightarrow 0$. Also ist wie gewünscht $F' = f$. $\square$

Wir diskutieren und illustrieren diesen Satz. Wir werden ihn und Theorem 2.8 erst am Ende des nächsten Kapitels systematisch für Integralberechnungen heranziehen; zuvor werden sie vor allem zur Entwicklung der Theorie verwendet.

BEMERKUNG 2.7. a) Für $f \in H(D)$ mit $f' \in C(D, \mathbb{C})$ folgt das Theorem auch aus Poincarés Theorem 4.15 in Analysis 2. Die dortige Integrabilitätsbedingung (4.1) ist im holomorphen Fall wegen der Formeln (1.10) und (1.4) erfüllt.

b) Mit gleichem Beweis gilt Theorem 2.6 sogar für Funktionen $f \in C(D, \mathbb{C}) \cap H(D \setminus \{w_0\})$ mit $w_0 \in D$, da Satz 2.5 auch für solche f gezeigt worden ist.

c) Das Theorem ist im allgemeinen auf Gebieten mit Löchern falsch. Laut Beispiel 1.20 haben wir auf $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ etwa $\int_{\partial B(0,1)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$.

d) Es gilt $\int_{\partial B(2,1)} \frac{dz}{z} = 0$, da der Integrand $f: z \mapsto 1/z$ auf der konvexen Menge $D := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 1/2\}$ holomorph ist und $\partial B(2,1)$ in D liegt.

e) Im Abschnitt 2.3 erweitern wir die Theoreme 2.6 und 2.8. $\diamond$

Wir leiten aus dem Integralsatz nun *Cauchys Integralformeln* her. Diese beinhalten zum einen die erstaunliche Aussage, dass eine komplex differenzierbare Funktion automatisch beliebig oft differenzierbar ist. Im Reellen gibt es dagegen sogar differenzierbare Funktionen mit einer unstetigen Ableitung, siehe Beispiel 5.14 in Analysis 1. Darüberhinaus werden durch die Integralformeln alle Ableitungen einer holomorphen Funktion f auf einer Kreisscheibe durch die Werte von f auf dem Kreisrand bestimmt (was reell wieder komplett falsch sein kann). Dieser verblüffende Sachverhalt wird das wesentliche Instrument zum Beweis der folgenden Hauptsätze sein. Da wir uns im ersten Teil auf Kreisscheiben in D einschränken, gilt dieser Teil für alle offenen D . Man beachte, dass (2.2) unabhängig von der Wahl des Radius $r > 0$ mit $z \in B(z_0, r) \subseteq \overline{B}(z_0, r) \subseteq D$ ist.

THEOREM 2.8. Seien $f \in H(D)$, $z_0 \in D$, $r > 0$ mit $\overline{B}(z_0, r) \subseteq D$, $n \in \mathbb{N}_0$, $z \in B(z_0, r)$ und $s := |z - z_0| < r$. Dann ist f beliebig oft auf D differenzierbar und wir erhalten

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} \, dw, \quad (2.2)$$

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! \, r}{(r - s)^{n+1}} \max_{|w - z_0| = r} |f(w)|. \quad (2.3)$$

(Hierbei wird $\partial B(z_0, r)$ durch $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, parametrisiert.)

Seien nun D sternförmig und γ eine geschlossene stückweise C^1 -Kurve in D mit Bild Γ und $z \in D \setminus \Gamma$. Dann gilt²

$$n(\gamma, z) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw. \quad (2.4)$$

BEWEIS. 1) Wir zeigen zuerst (2.4) für $n = 0$ und sternförmiges D . Sei $z \in D \setminus \Gamma$ fest gewählt. Wir definieren die Hilfsfunktion

$$g : D \rightarrow \mathbb{C}; \quad g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \in D \setminus \{z\}, \\ f'(z), & w = z. \end{cases} \quad (2.5)$$

Wegen der Holomorphie von f , liegt g in $H(D \setminus \{z\}) \cap C(D, \mathbb{C})$. Da D sternförmig ist, liefern Cauchys Integralsatz in der Version von Bemerkung 2.7 b) sowie Bemerkung 1.19 und (1.11) die Gleichungen

$$0 = \int_{\gamma} g dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi i n(\gamma, z) f(z).$$

2) Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Iterativ erhalten wir

$$\partial_z \frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{(w-z)^2}, \quad \dots, \quad \partial_z^n \frac{f(w)}{w-z} = \frac{n! f(w)}{(w-z)^{n+1}}$$

für $z \in D \setminus \Gamma$ und $w \in \Gamma$. Diese Ableitungen sind auf $(D \setminus \Gamma) \times \Gamma$ stetig. Ferner ist die Abbildung $z \mapsto n(\gamma, z)$ auf jeder Zusammenhangskomponente G_j von $D \setminus \Gamma$ konstant, siehe Lemma 1.23. Gemäß Satz 1.21 ist somit

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i n(\gamma, z)} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

n -fach differenzierbar in $z \in D \setminus \Gamma$ und wir können die Ableitungen am Integral vorbeiziehen. Damit ist die Cauchyformel (2.4) für alle n gezeigt.

3) Nun sei $D \subseteq \mathbb{C}$ lediglich offen und $\overline{B}(z_0, r) \subseteq D$. Da diese Kreisscheibe kompakt ist, gibt es einen Radius $r' > r$ mit $D_0 := B(z_0, r') \subseteq D$ (vergleiche den Beweis von Satz 2.5). Wir können nun (2.4) für D_0 , $z \in B(z_0, r)$ und $\partial B(z_0, r)$ anwenden. Zusammen mit Beispiel 1.24 folgt (2.2). Insbesondere f ist auf D_0 , und damit auf D , beliebig oft differenzierbar.

Die *Cauchyschen Ungleichungen* (2.3) folgen schließlich durch direktes Abschätzen von (2.2) mittels der unteren Schranke

$$|w-z| \geq |w-z_0| - |z_0-z| = r-s > 0$$

für $w \in \partial B(z_0, r)$ und $s = |z-z_0| < r$. □

Das folgende Holomorphiekriterium von *Morera* besagt insbesondere, dass Cauchys Integralformel nur für holomorphe Funktionen gelten kann.

²Diese Aussage wurde in der Vorlesung lediglich an anderer Stelle kurz erwähnt.

KOROLLAR 2.9. *Eine Funktion $f \in C(D, \mathbb{C})$ erfülle $\int_{\partial\Delta} f dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subseteq D$. Dann ist f holomorph.*

BEWEIS. Sei $z_0 \in D$. Wähle einen Radius $r > 0$ mit $B(z_0, r) \subseteq D$. Nach dem Beweis von Theorem 2.6 und der Voraussetzung hat f auf $B(z_0, r)$ eine Stammfunktion $F \in H(B(z_0, r))$. Theorem 2.8 impliziert dann die Holomorphie von $f = F'$ auf $B(z_0, r)$ und damit auf D . $\square$

BEISPIEL 2.10. Sei $\partial B(2, 1)$ einmal positiv durchlaufen. Da $\frac{3}{2} \in B(2, 1)$ ist, gilt

$$\int_{\partial B(2,1)} \frac{w^{\frac{1}{2}}}{w - \frac{3}{2}} dw = 2\pi i \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Hier wählen wir $D = B(2, 3/2)$ und das holomorphe $f : D \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = \sqrt{z}$. $\diamond$

2.2. Folgerungen aus dem Integralsatz

Zunächst diskutieren wir unmittelbare Folgerungen der Cauchyschen Integralformel. Wir beginnen mit einem zentralen Begriff der Analysis.

DEFINITION 2.11. *Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt analytisch, wenn es für jeden Punkt $z \in D$ so einen Radius $r(z) > 0$ mit $B(z, r(z)) \subseteq D$ gibt, dass f auf $B(z, r(z))$ gleich einer Potenzreihe um z ist. Eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ heißt ganz.*

Nach Satz 1.3 sind analytische Funktionen holomorph. Wir wissen schon, dass eine holomorphe Funktion f beliebig oft differenzierbar ist. Im Reellen gibt es aber nichtanalytische C^∞ -Funktionen, siehe Beispiel 5.39 in Analysis 1. Der folgende *Entwicklungssatz* zeigt, dass dies im Komplexen nicht auftreten kann und dass f eine Taylorreihe auf dem maximal möglichen Konvergenzkreis besitzt (relativ zum gegebenen Definitionsbereich D von f). Tatsächlich ist der Umweg über das Komplexe der weitaus bequemste Weg um zu zeigen, dass die Taylorreihe einer reellen Funktion gegen diese konvergiert. Wir illustrieren dies unten anhand der Binomialreihe, deren Grenzwert wir in Analysis 1 nicht berechnet hatten.

THEOREM 2.12. *Sei $f \in H(D)$. Dann ist f analytisch. Genauer setzen wir für jedes $z_0 \in D$ den Radius $R(z_0) := \sup \{r > 0 \mid B(z_0, r) \subseteq D\}$. Es seien $\bar{r}, r \in (0, R(z_0))$. Für $z \in B(z_0, R(z_0))$ hat f dann die Taylorreihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n := \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad (2.6)$$

die auf $\overline{B}(z_0, \bar{r})$ gleichmäßig und absolut konvergiert. Für ganze f gilt obiges mit $R(z_0) = +\infty$.

BEWEIS. Wir fixieren beliebige $\bar{r}, r \in (0, R(z_0))$. Sei $z \in \overline{B}(z_0, \bar{r})$. Wir wählen einen Radius $r' \in (\bar{r}, R(z_0))$. Für $w \in \partial B(z_0, r')$ ergibt sich

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r'} \leq \frac{\bar{r}}{r'} =: q < 1.$$

Diese Ungleichung erlaubt es, den Integranden aus der Cauchyformel (2.2) für $f(z)$ mittels der geometrischen Reihe in

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{f(w)}{w-z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n$$

zu entwickeln. Dabei konvergiert die Reihe gleichmäßig für $w \in \partial B(z_0, r')$ nach dem Majorantenkriterium (Satz 4.43 in Analysis 1), da $\sum_{n \geq 0} q^n < +\infty$ ist. Formel (2.2) für $n = 0$ und Satz 1.21 liefern nun

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r')} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r')} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw (z-z_0)^n.$$

Nach Theorem 2.8 ist das letzte Integral gleich $2\pi i f^{(n)}(z_0)/n!$ und man kann r' durch r ersetzen. Also ist (2.6) gezeigt. Ferner erhalten wir die Abschätzung

$$|a_n(z-z_0)^n| \leq \frac{2\pi r'}{2\pi} \max_{|w-z_0|=r'} |f(w)| (r')^{-n-1} \bar{r}^n = q^n \max_{|w-z_0|=r'} |f(w)|.$$

Gemäß Satz 4.43 in Analysis 1 konvergiert somit die Reihe in (2.6) gleichmäßig und absolut auf $\bar{B}(z_0, \bar{r})$. Die letzte Aussage folgt unmittelbar. $\square$

BEISPIEL 2.13. Seien $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ und $f : D := \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = (1+z)^\alpha$. Da f holomorph auf D ist, hat diese Funktion eine Potenzreihe bei $z_0 = 0$ mit Konvergenzradius $\rho \geq 1$. Es gilt genauer $\rho = 1$, da für $n > \alpha$ die Ableitung $f^{(n)}(z)$ für $z \rightarrow -1$ unbeschränkt ist. Die Taylorkoeffizienten von f bei 0 lassen sich leicht iterativ berechnen und wir erhalten damit die *Binomialreihe*

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \quad |z| < 1, \quad \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad \binom{\alpha}{0} := 1.$$

(Vergleiche Beispiel 5.39 in Analysis 1.) $\diamond$

Als weitere Folgerung der Integralformel zeigen wir die holomorphe Variante des Differenzierbarkeitssatzes aus Analysis 3, wobei nur h eine Majorante benötigt.

KOROLLAR 2.14. Seien $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $h : D \times S \rightarrow \mathbb{C}$ erfülle die folgenden Eigenschaften.

- 1) Für jedes $z \in D$ ist die Abbildung $h(z, \cdot) : S \rightarrow \mathbb{C}$; $s \mapsto h(z, s)$, messbar.
- 2) Es gibt eine integrierbare Funktion $g : S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $|h(z, s)| \leq g(s)$ für alle $(z, s) \in D \times S$.
- 3) Für jedes $s \in S$ ist die Abbildung $h(\cdot, s) : D \rightarrow \mathbb{C}$; $z \mapsto h(z, s)$, holomorph.

Dann ist die Funktion $H : D \rightarrow \mathbb{C}$; $H(z) = \int_S h(z, s) d\mu(s)$, holomorph mit der Ableitung

$$H'(z) = \int_S \frac{\partial}{\partial z} h(z, s) d\mu(s), \quad z \in D.$$

BEWEIS. Nach 1) und 2) sowie Satz 2.26 in Analysis 3 ist die Abbildung $s \mapsto h(z, s)$ für jedes $z \in D$ integrierbar. Wir wählen einen Punkt $z_0 \in D$ und einen Radius $R > 0$ mit $\overline{B}(z_0, R) \subseteq D$. Seien weiter $r \in (0, R)$, $z \in B(z_0, r)$ und $s \in S$. Dann liefert die Cauchyabschätzung (2.3) die Ungleichung

$$|\partial_z h(z, s)| \leq \frac{R}{(R-r)^2} \max_{|w-z_0|=R} |h(w, s)| \leq \frac{R}{(R-r)^2} g(s).$$

Gemäß Formel (1.5) wird $\partial_x \operatorname{Re} h$ genauso dominiert. Aus Theorem 3.18 in Analysis 3 folgern wir nun die Existenz der Ableitung

$$\partial_x \operatorname{Re} H(z) = \int_S \partial_x \operatorname{Re} h(z, s) d\mu(s).$$

Die Holomorphie von H und die behauptete Gleichung zeigt man schließlich so wie im Beweis von Satz 1.21. $\square$

Im folgenden Beispiel sieht man, wie man sich in einer wichtigen Situation eine Majorante für das obige Korollar verschafft. (Vergleiche Beispiel 3.19 in Analysis 3.)

BEISPIEL 2.15. Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ messbar und es gebe Konstanten $M \geq 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$ mit $|f(t)| \leq Me^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$. Dann existiert die *Laplace transformierte*

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt \quad \text{für } \operatorname{Re} \lambda > \omega$$

von f , und sie ist auf $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda > \omega\}$ holomorph mit den Ableitungen

$$\hat{f}^{(n)}(\lambda) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n f(t) dt, \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega, \quad n \in \mathbb{N}.$$

BEWEIS. Wir setzen $h(\lambda, t) = e^{-\lambda t} f(t)$ für $t \geq 0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Seien $\varepsilon > 0$ und $\operatorname{Re} \lambda \geq \omega + \varepsilon$. Dann erhalten wir die Ungleichung

$$|h(\lambda, t)| = e^{-t \operatorname{Re} \lambda} |f(t)| \leq Me^{(\omega - \operatorname{Re} \lambda)t} \leq Me^{-\varepsilon t} =: g(t)$$

für $t \geq 0$. Da g integrierbar ist, existiert $\hat{f}(\lambda)$. Weiter ist die Abbildung $\lambda \mapsto h(\lambda, t)$ für jedes $t \geq 0$ holomorph. Also liefert Korollar 2.14 iterativ die Behauptung für $\operatorname{Re} \lambda > \omega + \varepsilon$; und damit für alle $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, da $\varepsilon > 0$ beliebig ist. $\square$

Der nächste berühmte Satz von *Liouville* zeigt nachdrücklich, wie stark die Holomorphie (zumal für $D = \mathbb{C}$) eine Funktion einschränkt. Man beachte dabei, dass Beschränktheit oft einfach nachzuprüfen und weit von Konstanz entfernt ist. Außerdem ist etwa der Sinus im Reellen beschränkt und natürlich nicht konstant.

THEOREM 2.16. *Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

BEWEIS. Sei $z \in \mathbb{C}$. Wähle einen Radius $r \geq 2|z|$. Die Cauchyabschätzung (2.3) mit $z_0 = 0$ liefert die Ungleichung

$$|f'(z)| \leq \frac{r}{(r-r/2)^2} \max_{|w|=r} |f(w)| \leq \frac{4}{r} \|f\|_\infty.$$

Im Limes $r \rightarrow \infty$ folgt $f'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, sodass Satz 1.22 die Aussage zeigt. $\square$

Wir zeigen die bekannteste Anwendung von Liouville, den *Fundamentalsatz der Algebra*, der im übrigen auch elementarere Beweise besitzt.

KOROLLAR 2.17. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein komplexes Polynom n -ten Grades hat n (eventuell wiederholte) Nullstellen in $\mathbb{C}$.*

BEWEIS. Wir schreiben das Polynom als $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ für $z \in \mathbb{C}$ und Konstanten $a_j \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$.

1) Wir nehmen an, dass p nirgends gleich 0 wäre. Somit existiert die ganze Funktion $f := 1/p$ auf $\mathbb{C}$. Im Hinblick auf Liouville müssen wir nun die Beschränktheit von f zeigen. Der Satz vom Maximum liefert diese auf allen Kugeln. Um das Verhalten von f bei ∞ zu kontrollieren, wählen wir einen Radius $r_0 > 0$ mit

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|a_n|} r_0^{j-n} \leq \frac{1}{2}.$$

(Dieser existiert, da alle Exponenten $j - n$ negativ sind.) Sei $|z| \geq r \geq r_0$. Damit ist $|z|$ so groß, dass in p der Term $a_n z^n$ dominiert; genauer gilt

$$\begin{aligned} |p(z)| &\geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0| \geq |a_n| |z|^n - (|a_{n-1}| |z|^{n-1} + \dots + |a_0|) \\ &= |a_n| |z|^n \left(1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|a_n|} |z|^{j-n} \right) \geq |a_n| r^n \left(1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{|a_n|} r_0^{j-n} \right) \geq \frac{|a_n|}{2} r^n, \\ |f(z)| &\leq \frac{2}{|a_n|} r^{-n}. \end{aligned}$$

Somit ist f auf $\mathbb{C}$ beschränkt, also konstant laut Theorem 2.16. Gemäß der obigen Abschätzung verschwindet f für $|z| \rightarrow +\infty$. Es folgt $f = 0$, was unmöglich ist.

2) Demnach hat jedes nichtkonstante komplexe Polynom mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Mit Polynomdivision folgt dann iterativ die Aussage. $\square$

In den nächsten Resultaten verwenden wir die Cauchysche Integralformel und den Entwicklungssatz, um eine Vielzahl bedeutender und überraschender Eigenschaften holomorpher Funktionen herzuleiten, die im Reellen komplett falsch sind. Dabei werden einige Fragestellungen aus Analysis 1 und 2 neu aufgegriffen.

Der folgende Konvergenzbegriff ist typisch für die komplexe Analysis. Wir hatten ihn implizit schon in Analysis 1 bei Potenzreihen kennengelernt.

DEFINITION 2.18. *Seien $f, f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wenn auf jeder kompakten Menge $K \subseteq D$ die Supremumsnorm $\sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)|$ für $n \rightarrow +\infty$ gegen 0 strebt, so konvergiert (f_n) kompakt auf D gegen f (oder gleichmäßig auf Kompakta).*

BEMERKUNG 2.19. Man beachte, dass $H(D)$ unbeschränkte Funktionen enthält und die kompakte Konvergenz echt schwächer als die gleichmäßige ist (da D nicht kompakt ist). Die kompakte Konvergenz kann durch eine Metrik beschrieben werden, die der in Beispiel 2.15 e) aus Analysis 2 ähnelt. Wenn stetige Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ kompakt gegen f konvergieren, so ist auch f stetig (siehe Theorem 4.41

in Analysis 1). Gemäß Beispiel 5.30 aus Analysis 1 folgt im Reellen aber selbst aus der gleichmäßigen Konvergenz von $f_n \in C^\infty([-1, 1])$ gegen $f \in C([-1, 1])$ im allgemeinen *nicht* die Differenzierbarkeit von f . $\diamond$

Der folgende *Konvergenzsatz von Weierstraß* zeigt wieder einen dramatischen Unterschied zwischen reeller und komplexer Analysis.

THEOREM 2.20. *Eine Folge (f_n) in $H(D)$ konvergiere kompakt gegen f . Dann ist auch f holomorph und alle Ableitungen $f_n^{(k)}$ konvergieren kompakt auf D gegen $f^{(k)}$ für $n \rightarrow +\infty$ und $k \in \mathbb{N}$.*

BEWEIS. 1) Sei $\Delta \subseteq D$ ein abgeschlossenes Dreieck. Nach Voraussetzung konvergieren die Funktionen f_n gleichmäßig auf $\partial\Delta$ gegen $f \in C(D, \mathbb{C})$. Satz 1.21 und Goursats Satz 2.5 liefern nun

$$\int_{\partial\Delta} f \, dz = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Delta} f_n \, dz = 0.$$

Nach Korollar 2.9 von Morera ist f folglich holomorph.

2) Seien $z_0 \in D$ und $r > 0$ mit $\overline{B}(z_0, 2r) \subseteq D$ und $z \in \overline{B}(z_0, r)$. Dann liefert die Cauchyabschätzung (2.3) mit $s = |z - z_0| \leq r$ die Ungleichung

$$\sup_{z \in \overline{B}(z_0, r)} |f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z)| \leq \frac{k! 2r}{(2r - r)^{k+1}} \max_{|w - z_0| = 2r} |f(w) - f_n(w)|$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$, da $f - f_n$ holomorph ist. Nach Voraussetzung konvergiert also die linke Seite für $n \rightarrow +\infty$ gegen 0.

3) Sei $K \subseteq D$ kompakt. Für jeden Punkt $z \in K$ wählen wir einen Radius $r(z) > 0$ mit $\overline{B}(z, 2r(z)) \subseteq D$. Offenbar liegt K in der Vereinigung der offenen Kugeln $B(z, r(z))$. Mittels des Theorems 2.46 von Heine–Borel aus Analysis 2 erhalten wir nun $z_j \in K$ und $r_j > 0$ mit $K \subseteq B(z_1, r_1) \cup \dots \cup B(z_m, r_m) \subseteq D$ und $\overline{B}(z_j, 2r_j) \subseteq D$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$. Schritt 2) impliziert dann die Konvergenzaussage. $\square$

Der *Identitätssatz* macht die erstaunliche Aussage, dass eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet schon durch ihre Werte auf einer kleinen Strecke oder nur auf einer Folge mit Grenzwert in D festgelegt ist. Im Reellen ist das Unfug. Es gibt natürlich unendlich viele C^1 -Funktionen auf $(-1, 2)$, die auf $[0, 1]$ verschwinden; im Komplexen gelingt das nur der Nullfunktion. Hier und im Folgenden nutzen wir häufig die Potenzreihen aus dem Entwicklungssatz 2.12.

Der Grenzwert in Aussage c) muss im Übrigen in D liegen. So verschwindet die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = \sin(1/z)$, in den Punkten $z_n = (\pi n)^{-1} \rightarrow 0$, ohne konstant gleich Null zu sein.

THEOREM 2.21. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(D)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- a) *Es ist $f = 0$ auf D .*
- b) *Es gibt so eine Zahl $z_0 \in D$, dass $f^{(k)}(z_0) = 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.*

c) Es existieren solche Punkte $z_n, z_0 \in D$, dass $f(z_n) = 0$ und $z_n \neq z_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie $z_n \rightarrow z_0$ für $n \rightarrow +\infty$ erfüllt sind.

Somit sind Funktionen $g, h \in H(D)$ schon auf D gleich, wenn g und h auf einer Menge $M \subseteq D$ mit einem Häufungspunkt³ $z_0 \in D$ übereinstimmen.

BEWEIS. Der Zusatz folgt aus der Implikation ‘c) $\Rightarrow$ a)’ für $f := g - h$. Weiter ist Teil c) natürlich eine Konsequenz von a).

Es gelte Aussage c). Es seien z_n und z_0 wie in c). Dann folgt $f(z_0) = 0$ auf Grund der Stetigkeit von f . Wir nehmen an, Behauptung b) wäre falsch. Also gibt es einen Index $m \in \mathbb{N}$ mit

$$f(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Somit hat f wegen Theorem 2.12 auf jeder Kugel $B(z_0, r) \subseteq D$ die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Für $z \in B(z_0, r)$ setzen wir

$$g(z) := \sum_{l=0}^{+\infty} a_{l+m} (z - z_0)^l = \sum_{k=m}^{+\infty} a_k (z - z_0)^{k-m} = (z - z_0)^{-m} f(z),$$

wobei in der letzten Gleichung $z \neq z_0$ sei. Als Potenzreihe ist die Funktion $g : B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, und sie erfüllt $g(z_0) = a_m \neq 0$. Auf der anderen Seite ist z_n ab einem Index $n_0 \in \mathbb{N}$ ein Element von $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, sodass die Werte

$$g(z_n) = (z_n - z_0)^{-m} f(z_n) = 0$$

für $n \rightarrow \infty$ gegen $g(z_0)$ streben, was der Stetigkeit von g widerspricht. Also gilt b).

Sei Aussage b) wahr. Sei $z \in D$. Nach Lemma 4.12 aus Analysis 2 gibt es einen Streckenzug γ von z_0 nach z in D . Wegen der Kompaktheit des Bildes Γ von γ , ist der Abstand $\delta := \text{dist}(\Gamma, \partial D) > 0$ positiv. Also liegt die Kugel $B(w, \delta)$ für jedes $w \in \Gamma$ in D . Wir können nun γ mit weiteren Zwischenstellen auf den Strecken so zu einem Streckenzug $\overrightarrow{z_0 w_1} \cup \dots \cup \overrightarrow{w_N z}$ umschreiben, dass jede Teilstrecke $\overrightarrow{w_j w_{j+1}}$ in $B(w_j, \delta)$ enthalten ist (wobei $w_0 := z_0$ und $w_{N+1} = z$ sind). Nach Behauptung b) und Theorem 2.12 verschwindet f auf $B(z_0, \delta)$, und damit gilt b) auch in w_1 . Iterativ ergibt sich Aussage a). $\square$

Ohne den Wegzusammenhang ist der obige Satz (und manche seiner Korollare) falsch. Man betrachte etwa die Funktion $f = \mathbb{1}_{B(0,1)}$ auf $D = B(0,1) \cup B(3,1)$. Der folgende Korollare (zuerst der *Nullstellensatz*) besagen u.a., dass sich eine holomorphe, nichtkonstante Funktion auf D in einer Nullstelle wie ein Polynom verhält und sich z.B. ihre Nullstellen nicht in D häufen können.

³Vergleiche Definition 2.21 in Analysis 2.

KOROLLAR 2.22. Seien D ein Gebiet, $f \in H(D)$ ungleich der Nullfunktion und $z_0 \in D$ mit $f(z_0) = 0$. Dann existieren solche Zahlen $m \in \mathbb{N}$ und $r > 0$ mit $B(z_0, r) \subseteq D$ und eine Funktion $g \in H(B(z_0, r))$ mit $g(z_0) \neq 0$, dass die Gleichungen

$0 = f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0), \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0 \quad \text{und} \quad f(z) = (z - z_0)^m g(z)$
für $z \in B(z_0, r)$ gelten. (Man nennt m die Ordnung der Nullstelle z_0 .)

BEWEIS. Die Behauptung über die Ableitungen folgt aus Theorem 2.21, dessen Beweis auch g liefert. $\square$

BEMERKUNG 2.23. Wegen der Stetigkeit von $|g|$ und dem Satz vom Maximum existieren in Korollar 2.22 Zahlen $\bar{r} \in (0, r)$ und $c, C > 0$ mit $c \leq |g(z)| \leq C$ für alle $z \in \overline{B}(z_0, \bar{r})$. Also verhält sich f nahe der Nullstelle wie das Monom $(z - z_0)^m$. $\diamond$

Diese Aussage gilt in $\mathbb{R}$ nicht. So erfüllt die C^1 -Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = |x|^{\frac{3}{2}}$,

$$|x|^{-k}|f(x)| \longrightarrow \begin{cases} 0, & k \in \{0, 1\}, \\ +\infty, & k \in \{2, 3, \dots\}. \end{cases}$$

KOROLLAR 2.24. Seien D ein Gebiet, $f \in H(D)$ nicht konstant und $w \in f(D)$. Dann ist die Menge $N_w = f^{-1}(\{w\}) = \{z \in D \mid f(z) = w\}$ diskret (d.h., für jedes $z \in N_w$ gibt es einen Radius $r_z > 0$ mit $B(z, r_z) \cap N_w = \{z\}$).

BEWEIS. Wenn N_w nicht diskret wäre, gäbe es Punkte $z_n \rightarrow z_0$ in D mit $z_n \neq z_0$ und $f(z_n) = w$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Identitätssatz 2.21 angewendet auf $g = f - w\mathbb{1}$ liefert einen Widerspruch. $\square$

Im Reellen muss man beim Fortsetzen einer Funktion in C^1 nur Anschlussbedingungen am Definitionsrand beachten, ansonsten ist die Fortsetzung in C^1 beliebig. Laut dem Identitätssatz ist hingegen die *holomorphe Fortsetzung* in einem Gebiet eindeutig bestimmt.

KOROLLAR 2.25. Seien $f \in H(D)$ und $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $D \subseteq U$. Dann gibt es höchstens eine Funktion $g \in H(U)$ mit $g|_D = f$.

BEWEIS. Die Aussage folgt direkt aus Theorem 2.21, da $D \neq \emptyset$ offen ist. $\square$

Im ersten Beispiel illustrieren wir noch einmal, welche Funktionen nicht komplex differenzierbar sein können. Das zweite ist eine typische Anwendung der holomorphen Fortsetzung.

BEISPIEL 2.26. a) Sei $r > 0$. Die beliebig oft differenzierbare Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

hat (nach Einschränkung auf $(-r, r)$) keine holomorphe Fortsetzung auf $B(0, r) \subseteq \mathbb{C}$, da diese auf $(-r, 0)$ verschwinden müsste, aber $f > 0$ auf $\mathbb{R}_+$ ist.

b) Die *Gammafunktion*

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

hat genau eine holomorphe Fortsetzung auf $D := \mathbb{C} \setminus \{-n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Weiter gilt $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ für $z \in D$.

BEWEIS. Für $t > 0$ und $z \in \mathbb{C}_+$ liefert Bemerkung 1.14 die Gleichung $|t^{z-1}| = t^{\operatorname{Re} z - 1}$. Seien $\varepsilon \in (0, 1]$ und $\operatorname{Re} z \in [\varepsilon, 1/\varepsilon]$. Dann wird der Integrand von Γ durch

$$|t^{z-1} e^{-t}| \leq \begin{cases} t^{\varepsilon-1}, & t \in (0, 1], \\ t^{\frac{1}{\varepsilon}-1} e^{-t}, & t > 1, \end{cases}$$

dominiert. Die rechte Seite ist auf $\mathbb{R}_+$ integrierbar. Da $\varepsilon \in (0, 1]$ beliebig ist, impliziert Korollar 2.14 die Holomorphie der Funktion $z \mapsto \Gamma(z)$ auf $\mathbb{C}_+$. In Beispiel 1.28 aus Analysis 2 haben wir $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für $x > 0$ gezeigt. Da hier beide Seiten der Gleichung auf $\mathbb{C}_+$ holomorphe Funktionen definieren, zeigt Theorem 2.21 die Identität $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ auf $\mathbb{C}_+$. Nun ist die Abbildung $z \mapsto \Gamma(z+1)/z$ auch auf der Menge $D_1 := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \operatorname{Re} z > -1\}$ holomorph, sodass sie die holomorphe Fortsetzung von Γ auf D_1 ist. Die Formel $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ gilt dann für $z \in D_1$ per Konstruktion. Die Behauptung folgt nun iterativ. $\square$

Als Vorbereitung für zwei weitere Hauptsätze der Funktionentheorie zeigen wir ein erstaunliches Kriterium für Nullstellen einer holomorphen Funktion.

LEMMA 2.27. Seien $f \in H(D)$, $r > 0$ und $B := B(z_0, r)$ mit $\overline{B} \subseteq D$. Es gelte

$$0 \leq |f(z_0)| < \min_{z \in \partial B} |f(z)|$$

Dann hat f eine Nullstelle in B .

BEWEIS. Wir nehmen an, f besäße keine Nullstelle auf B . Nach Voraussetzung hat f also keine Nullstelle auf $\overline{B}$. Nach dem Satz von Minimum gibt es dann einen Punkt $z_1 \in \overline{B}$ mit $\min_{\overline{B}} |f| = |f(z_1)| =: \delta > 0$. Weiter finden wir einen Radius $R > r$ mit $\overline{B}(z_0, R) \subseteq D$ (vergleiche den Beweis von Satz 2.5). Da f gleichmäßig stetig auf $\overline{B}(z_0, R)$ ist, erhalten wir eine Zahl $r_1 \in (r, R)$ mit $|f(z)| \geq \delta/2$ für alle $z \in D_1 := B(z_0, r_1)$. Demnach ist der Kehrwert $g = 1/f$ auf D_1 holomorph. Cauchys Ungleichung (2.3) impliziert nun die Abschätzung

$$\frac{1}{|f(z_0)|} = |g(z_0)| \leq \max_{|w-z_0|=r} |g(w)| = \left(\min_{|w-z_0|=r} |f(w)| \right)^{-1},$$

die der Annahme widerspricht. $\square$

Wir erinnern daran, dass eine Funktion f genau dann stetig ist, wenn Urbilder offener Menge wieder offen sind. Für injektive f ist demnach die Stetigkeit der Inversen äquivalent dazu, dass f offene Mengen in offene abbildet. Im Reellen muss das auch für glatte injektive Funktionen nicht der Fall sein, siehe das Beispiel 4.33

in Analysis 1. Im nichtinjektiven Fall bildet schon $f(x) = x^2$ das offene Intervall $(-a, a)$ auf $[0, a^2)$ ab.

Um so erstaunlicher ist der folgende *Offenheitssatz* für holomorphe Funktionen, die nirgends lokal konstant sind. Die zweite Version heißt auch *Satz von der Gebietstreue*. Das Beispiel nach Theorem 2.21 zeigt, dass man hier tatsächlich lokale Konstanz ausschließen muss, bzw. den Wegzusammenhang benötigt. Wir werden den Offenheitssatz wesentlich für das Biholomorphietheorem 3.5 verwenden.

THEOREM 2.28. *Sei $f \in H(D)$.*

a) Sei f auf keiner Kugel in D konstant. Dann bildet f offene Mengen $U \subseteq D$ auf offene Mengen $f(U) \subseteq \mathbb{C}$ ab.

b) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und f nicht konstant. Dann ist $f(D)$ ein Gebiet.

BEWEIS. a) Sei $U \subseteq D$ offen. Wir betrachten einen Punkt $f(z_0)$ in $f(U)$, wobei $z_0 \in U$ ist. Wir suchen einen Radius $\delta > 0$ mit $B(f(z_0), \delta) \subseteq f(U)$. (Dann ist $f(U)$ offen und Aussage a) gezeigt.) Sei dazu $r_0 > 0$ mit $B_0 := B(z_0, r_0) \subseteq U$. Nach Voraussetzung ist die Einschränkung $f|_{B_0}$ nicht konstant. Nach Korollar 2.24 gibt es dann so einen Radius $r \in (0, r_0)$, dass für jedes $z \in B := \overline{B}(z_0, r)$ mit $z \neq z_0$ auch $f(z) \neq f(z_0)$ ist. Da ∂B kompakt ist, erhalten wir die Ungleichung

$$\delta := \frac{1}{2} \min_{z \in \partial B} |f(z) - f(z_0)| > 0.$$

Sei $w \in B(f(z_0), \delta)$. Wir wollen mittels Lemma 2.27 nachweisen, dass w in $f(U)$ liegt. In der Tat erfüllen alle $z \in \partial B$ die untere Schranke

$$\begin{aligned} |f(z) - w| &\geq |f(z) - f(z_0)| - |f(z_0) - w| \geq 2\delta - \delta = \delta, \\ \min_{z \in \partial B} |f(z) - w| &\geq \delta > |f(z_0) - w|. \end{aligned}$$

Lemma 2.27 liefert somit eine Zahl $z_1 \in B \subseteq U$ mit $f(z_1) - w = 0$. Also liegt $w = f(z_1)$ in $f(U)$, und folglich ist $f(U)$ offen.

b) Seien nun D ein Gebiet und f nicht konstant. Nach Korollar 2.24 ist dann f auf keiner Kugel in D konstant. Nach Teil a) ist also $f(D)$ offen. Theorem 2.58 aus Analysis 2 zeigt ferner, dass $f(D)$ wegzusammenhängend ist. $\square$

Das *Maximumsprinzip* beschäftigt sich mit den Maxima des Betrags $|f|$. Es besitzt reelle Analoga, die für gewisse partielle Differentialgleichungen von großer Bedeutung sind. Unser Beweis beruht auf dem Offenheitssatz; man könnte alternativ Cauchys Integralformel verwenden. Es gibt aber auch reelle Zugänge.

THEOREM 2.29. *Seien D ein Gebiet und $f \in H(D)$ nicht konstant.*

a) Dann hat die Abbildung $D \rightarrow \mathbb{R}; z \mapsto |f(z)|$, kein lokales Maximum.

b) Seien ferner D beschränkt und $f \in C(\overline{D}, \mathbb{C})$. Dann gilt

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

BEWEIS. a) Wir nehmen an, $|f|$ besäße ein lokales Maximum $z_0 \in D$. Dann gäbe so einen Radius $r > 0$ mit $B(z_0, r) \subseteq D$, dass f der Ungleichung $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in B(z_0, r)$ genügt. Es gibt aber Punkte $w_n \in \mathbb{C}$ mit $|w_n| > |f(z_0)|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $w_n \rightarrow f(z_0)$ für $n \rightarrow +\infty$. Nach Theorem 2.28 ist das Bild $f(B(z_0, r))$ offen, sodass für einen genügend großen Index w_N in $f(B(z_0, r))$ liegt und damit gleich $f(z)$ für ein $z \in B(z_0, r)$ ist. Daraus folgt der Widerspruch $|f(z)| = |w_N| > |f(z_0)|$.

b) Nach dem Satz von Maximum gibt es eine Zahl $z_1 \in \bar{D}$ mit $|f(z_1)| = \max_{\bar{D}} |f|$. Diese Zahl muss gemäß Teil a) im Rand ∂D liegen. $\square$

BEISPIEL 2.30. Teil b) des Maximumprinzips ist auf unbeschränkten Gebieten im allgemeinen falsch, wie das Beispiel $f(z) = \exp(\exp z)$ auf $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ zeigt. Hier gilt für $x \in \mathbb{R} \subseteq D$ zunächst die Gleichung

$$|f(x \pm i\frac{\pi}{2})| = \exp(\operatorname{Re}(e^x e^{\pm i\pi/2})) = e^0 = 1,$$

sodass f auf ∂D beschränkt ist. Jedoch ist $f(x) = e^{(e^x)}$ (sehr) unbeschränkt. $\diamond$

2.3. Homotope Varianten der Cauchyschen Sätze

Wir haben in Theorem 2.8 gesehen, dass gewisse Integrale auf konzentrischen Kreisen unabhängig vom Radius sind. Eine solche Wegunabhängigkeit kann bei ‘Löchern’ im Definitionsbereich jedoch nicht uneingeschränkt gelten. So ist etwa

$$\int_{\partial B(1/2, 1)} \frac{dz}{z} = \int_{\partial B(0, 1)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 = \int_{\partial B(2, 1)} \frac{dz}{z}.$$

Wir geben nun eine Bedingung an die Wege an, die solche Ungleichungen ausschließt. Wegen der großen Bedeutung dieser Definition in der Mathematik formulieren wir sie in metrischen Räumen (z.B. einen normierten Vektorraum). Wir bemerken dazu, dass wir in Definition 1.16 a) die Menge $\mathbb{C}$ durch jeden metrischen Raum M ersetzen können.

DEFINITION 2.31. Seien M ein metrischer Raum, $N \subseteq M$ und $\gamma_0, \gamma_1 \in C([a, b], M)$ geschlossene Wege in N . Die Wege γ_0 und γ_1 heißen homotop in N , wenn es eine Homotopie $h \in C([0, 1] \times [a, b], M)$ mit den Eigenschaften

$$h(s, t) \in N, \quad h(0, t) = \gamma_0(t), \quad h(1, t) = \gamma_1(t), \quad h(s, a) = h(s, b)$$

für alle $(s, t) \in [0, 1] \times [a, b]$ gibt. Wenn hier γ_1 eine konstante Funktion ist, so heißt γ_0 nullhomotop in N . Man schreibt dann $\gamma_0 \underset{N}{\sim} \gamma_1$ bzw. $\gamma_0 \underset{N}{\sim} 0$.

Sei $M = \mathbb{C}$. Wenn alle geschlossenen stückweisen C^1 -Wege in N nullhomotop sind, so heißt N einfach zusammenhängend.

Wir illustrieren diese Begriffe in $\mathbb{C}$ durch einige Beispiele.

BEISPIEL 2.32. a) Seien $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma_0(t) = re^{it}$ und $\gamma_1(t) = \rho(t)e^{it}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$, $r > 0$ und eine Funktion $0 < \rho \in C([0, 2\pi])$ mit $\rho(0) = \rho(2\pi)$. Dann sind γ_0 und γ_1 in D homotop mit der Homotopie

$$h(s, t) = (1 - s)re^{it} + s\rho(t)e^{it}, \quad (s, t) \in [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

Dabei kann $|h(s, t)| = (1 - s)r + s\rho(t)$ nie gleich 0 sein.

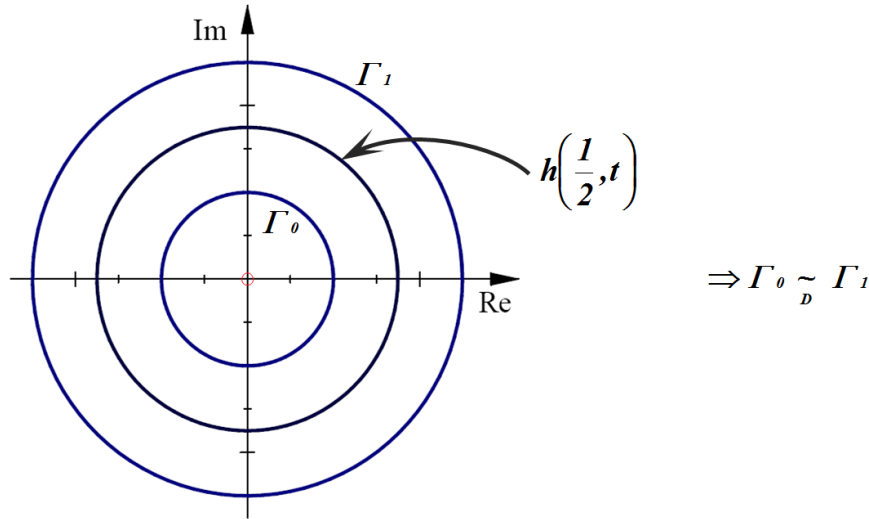


ABBILDUNG 2.2. Homotopie konzentrischer Kreise.

b) Sei D sternförmig. Dann ist D einfach zusammenhängend. Für eine geschlossene Kurve γ in D haben wir dabei die Homotopie $h(s, t) = (1 - s)\gamma(t) + sz_0$ von γ nach z_0 in D , da die Strecke von z_0 nach $\gamma(t)$ in D liegt.

c) Seien $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma_0(t) = e^{it}$ und $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann ist γ_0 nicht in D homotop zu $\gamma_1(t) = 1$ oder $\gamma_2(t) = 2 + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Dies folgt aus dem nächsten Theorem und den Gleichungen

$$\int_{\gamma_0} \frac{dz}{z} = 2\pi i, \quad \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = 0 = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z}.$$

d) Die Menge $D = B(0, 1) \setminus \left(\overrightarrow{-i0} \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right)$ ist einfach zusammenhängend. Im unten stehenden Bild kontrahiert man dazu zuerst die Teile von γ unterhalb der reellen Achse und dann den verbleibenden Teil von γ auf $i/2$, vergleiche Teil b).

e) Sei p ein geschlossener, einfacher Streckenzug mit Ecken $z_1, \dots, z_n$ und umschlossenem offenen Polygon G , wobei $\bar{G}$ in D liege. Dann ist p in D nullhomotop. Dies folgt etwa daraus, dass man G durch $n - 3$ Verbindungsstrecken zwischen Ecken in $n - 2$ Dreiecke mit disjunktem Inneren zerlegen kann. Diese Dreiecke kann man dann sukzessive wie in Teil b) zusammenziehen. Die Zerlegbarkeit zeigen wir (skizzenhaft) induktiv.

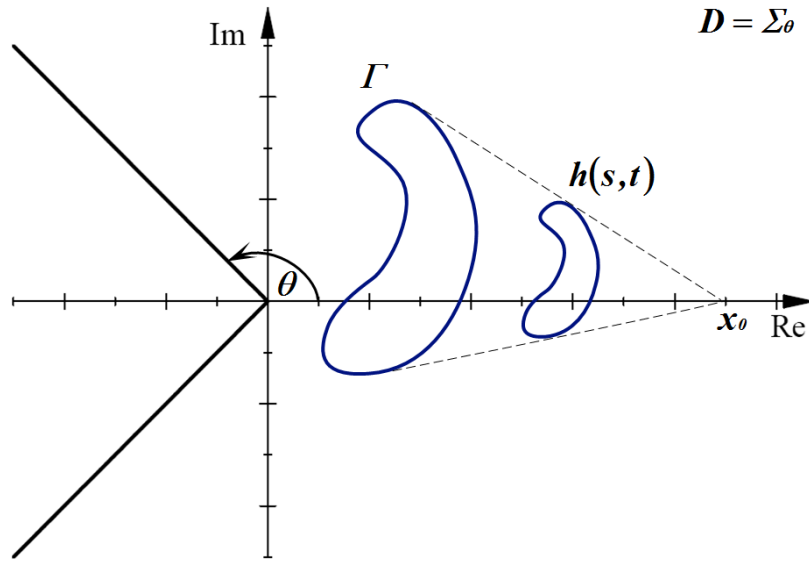


ABBILDUNG 2.3. Homotopie in einer sternförmigen Menge.

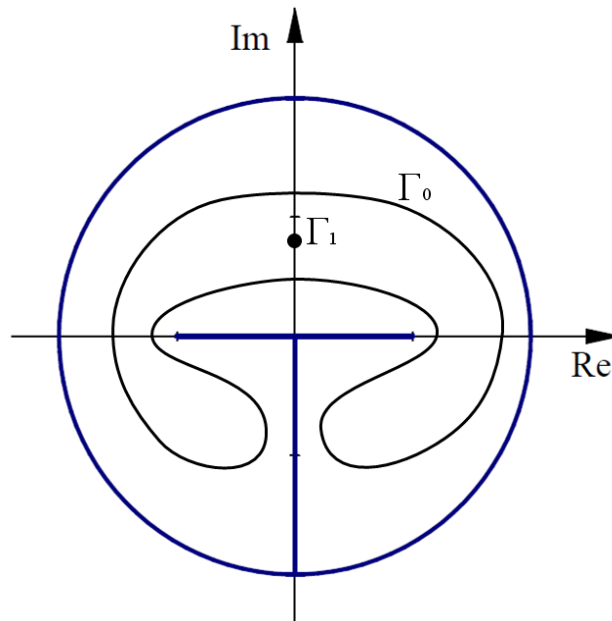


ABBILDUNG 2.4. Bild zu Beispiel 2.32d).

Für $n = 3$ ist sie klar. Die Behauptung gelte für ein $n \geq 3$. Sei z_k die Ecke mit minimalem Realteil (bei mehreren Minima verschiebe man ein wenig), und sei Δ das offene Dreieck mit Ecken z_{k-1} , z_k und z_{k+1} (wobei $z_0 := z_n$ und $z_{n+1} := z_0$ seien). Wenn kein z_j in Δ liegt, verläuft $\overrightarrow{z_{k-1}z_{k+1}}$ in G und schneidet keine Kante

in Δ . Man lässt z_k weg und wendet die Induktionsvoraussetzung an. Andernfalls sei z_j die Ecke in Δ mit minimalem Realteil. Dann liegt $\overrightarrow{z_k z_j}$ in G und schneidet keine Kante (außer in z_k und z_j). Wir wenden wieder die Induktionsvoraussetzung an. $\diamond$

Wir zeigen nun die *homotopen Versionen* von Cauchys Integralsatz und -formeln.⁴

THEOREM 2.33. *Seien D ein Gebiet und $f \in H(D)$.*

a) *Seien γ_0 und γ_1 geschlossene, in D homotope stückweise C^1 -Wege. Dann ist*

$$\int_{\gamma_0} f \, dz = \int_{\gamma_1} f \, dz. \quad (2.7)$$

Insbesondere erhalten wir $\int_{\gamma_0} f \, dz = 0$ für in D nullhomotope γ_0 , und Cauchys Integralsatz gilt auch auf einfach zusammenhängenden Gebieten D .

b) *Sei γ ein nullhomotoper, geschlossener stückweiser C^1 -Weg. Dann gilt*

$$n(\gamma, z) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} \, dw. \quad (2.8)$$

BEWEIS. 1) Wir zeigen zuerst Teil a). Nach Voraussetzung gibt es eine Homotopie h über D zu γ_0 und γ_1 , wobei wir $[a, b] = [0, 1]$ wählen können. Nach den Theoremen 2.47 und 2.49 aus Analysis 2 ist die Funktion $h : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig und ihr Bild $h([0, 1]^2) \subseteq D$ kompakt. Auch wegen Korollar 2.52 in Analysis 2 gibt also Zahlen $\varepsilon, \delta > 0$ mit

$$\forall z \in h([0, 1]^2) : B(z, \varepsilon) \subseteq D, \quad (2.9)$$

$$\forall (s, t), (s', t') \in [0, 1]^2 \text{ mit } |s - s'| + |t - t'| < \delta : |h(s, t) - h(s', t')| < \varepsilon.$$

Wir fixieren $n \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2}/n < \delta$ und setzen $z_{j,k} = h(j/n, k/n)$ für alle $j, k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Dabei gilt $z_{j,n} = z_{j,0}$ für jedes j , da h eine Homotopie ist. Gemäß Bedingung (2.9) liegen die Punkte $z_{j+1,k}$, $z_{j+1,k+1}$ und $z_{j,k+1}$ in $B(z_{j,k}, \varepsilon)$.

Wir betrachten nun das Viereck V_{jk} mit den Ecken $z_{j,k}$, $z_{j+1,k}$, $z_{j+1,k+1}$ und $z_{j,k+1}$. Dieses ist in $B(z_{j,k}, \varepsilon)$ enthalten, weil Kreise konvex sind. Cauchys Theorem 2.6 liefert deswegen die zentrale Identität

$$\int_{\partial V_{jk}} f \, dz = 0.$$

2) Weiter verwenden wir die Streckenzüge p_j mit den Ecken $z_{j,0}, \dots, z_{j,n}$ für $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Wir zeigen zunächst die Gleichung

$$\int_{p_j} f \, dz = \int_{p_{j+1}} f \, dz \quad (2.10)$$

⁴In der Vorlesung wurde nur ein Spezialfall von (2.8) bewiesen. Die Version hier wurde lediglich an anderer Stelle kurz erwähnt.

für jedes $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Mittels der obigen abgesetzten Identität und Bemerkung 1.19 folgt (2.10) aus

$$\begin{aligned} \int_{p_j} f \, dz - \int_{p_{j+1}} f \, dz &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\overrightarrow{z_{j,k} z_{j,k+1}}} f \, dz - \int_{\overrightarrow{z_{j+1,k} z_{j+1,k+1}}} f \, dz + \int_{\partial V_{jk}} f \, dz \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\overrightarrow{z_{j,k} z_{j+1,k}}} f \, dz - \int_{\overrightarrow{z_{j,k+1} z_{j+1,k+1}}} f \, dz \right) \\ &= \int_{\overrightarrow{z_{j,0} z_{j+1,0}}} f \, dz - \int_{\overrightarrow{z_{j,n} z_{j+1,n}}} f \, dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

3) Wir zeigen ferner die Gleichungen

$$\int_{\gamma_0} f \, dz = \int_{p_0} f \, dz \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_n} f \, dz = \int_{p_n} f \, dz. \quad (2.11)$$

Zunächst gilt $z_{0,k} = h(0, k/n) = \gamma_0(k/n)$, sodass nach Bedingung (2.9) für jedes $t \in J_k := [k/n, (k+1)/n]$ der Punkt $\gamma_0(t) = h(0, t)$ in $B(z_{0,k}, \varepsilon)$ liegt. Wir setzen $\psi_k = \gamma_0|_{J_k} \cup \overrightarrow{z_{0,k+1} z_{0,k}}$ für jedes $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Da Kugeln konvex sind, ist auch ψ_k in $B(z_{0,k}, \varepsilon)$ enthalten. Cauchys Integralsatz 2.6 impliziert somit die Identität

$$\int_{\psi_k} f \, dz = 0,$$

woraus sich die gewünschte Formel

$$\int_{\gamma_0} f \, dz - \int_{p_0} f \, dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\psi_k} f \, dz = 0$$

ergibt. Den zweiten Teil von (2.11) zeigt man genauso. Die Behauptung (2.7) ist nun eine direkte Konsequenz der Aussagen (2.10) und (2.11).

4) Die Cauchy-Integralformel (2.8) folgt aus dem Zusatz in a) genauso wie in Theorem 2.8 für sternförmige D . Dabei verwendet man, dass die Hilfsfunktion g in (2.5) gemäß Theorem 3.3 a) auf D holomorph ist. (Dieses Theorem beruht nur auf Theorem 2.12 und nicht auf der hier zu zeigenden Aussage.) $\square$

Man kann Nullhomotopie weiter abschwächen und die Klasse der geschlossenen Wege γ in D charakterisieren, für die $\int_{\gamma} f \, dz = 0$ für alle $f \in H(D)$ gilt, siehe Satz VI.2.1 und S.121 in [4]. Der obige Satz liefert die Homotopieinvarianz der Windungszahl.⁵

KOROLLAR 2.34. *Seien γ_0 und γ_1 geschlossene, in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ homotope stückweise C^1 -Wege. Dann gilt $n(\gamma_1, z) = n(\gamma_2, z)$. Insbesondere ist $n(\gamma, z) = 0$ für auf $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ nullhomotope geschlossene γ .*

⁵Die nächste Folgerung wurde in der Vorlesung lediglich an anderer Stelle kurz erwähnt.

KAPITEL 3

Isolierte Singularitäten

Ein wichtiges Thema der komplexen Analysis ist das Verhalten holomorpher Funktionen am Rand ihres Definitionsbereichs D . Im Falle eines isolierten Randpunktes z_0 ist dieses sehr gut verstanden. Wir klassifizieren zuerst solche isolierten Singularitäten z_0 und wenden dann die Theorie an.

3.1. Klassifikation und Laurentreihen

Wir führen zunächst die zentralen Begriffe ein.¹

DEFINITION 3.1. Seien $f \in H(D)$, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ und $r > 0$ so gegeben, dass $D_0 := B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ in D liegt. Dann ist z_0 eine isolierte Singularität von f . Weiter heißt z_0

- 1) hebbar, wenn es eine Funktion $\tilde{f} \in H(B(z_0, r))$ mit $f|_{D_0} = \tilde{f}|_{D_0}$ gibt ($\tilde{f}$ ist dann eine holomorphe Fortsetzung von f auf $B(z_0, r)$),
- 2) Pol, wenn $|f(z)| \rightarrow +\infty$ für $z \rightarrow z_0$ gilt,
- 3) wesentlich, wenn z_0 weder hebbar noch ein Pol ist.

Wir diskutieren einige typische Beispiele.

BEISPIEL 3.2. a) Sei $f : \Sigma_\pi \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = \log z$. Dann ist $z_0 = 0$ keine isolierte Singularität von f .

b) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Dann ist $z_0 = 0$ hebbar und die holomorphe Fortsetzung von f auf $\mathbb{C}$ ist durch die Potenzreihe $\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$ mit $\rho = \infty$ und $\tilde{f}(0) = 1$ gegeben. Dies kann man direkt aus der Sinusreihe ablesen.

c) Seien $m \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = z^{-m}$. Dann ist $z_0 = 0$ ein Pol von f , weil $|f(z)| = |z|^{-m} \rightarrow +\infty$ für $z \rightarrow 0$ (uneigentlich) konvergiert.

d) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = e^{1/z}$. Dann ist $z_0 = 0$ wesentlich, da hier z.B. $f(1/n) = e^n \rightarrow +\infty$ und $f(-1/n) = e^{-n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow +\infty$ gelten. $\diamond$

Wir kommen zum grundlegenden Resultat dieses Kapitels. Es liefert ein sehr bequemes Kriterium für die Hebbarkeit und zeigt, dass f bei Polstellen z_0 wie $(z - z_0)^{-m}$ wächst und dass f bei wesentlichen Singularitäten ganz $\mathbb{C}$ approximiert (was man noch deutlich verschärfen kann). Die Beweise beruhen vor allem auf dem Entwicklungs- und dem Nullstellensatz.

¹In der Definition und später wurde gegenüber der Vorlesung $z_0 \in \mathbb{C}$ zu $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ korrigiert.

THEOREM 3.3. *Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ eine isolierte Singularität von $f \in H(D)$. Dann gelten die folgenden Charakterisierungen.*

a) *Genau dann ist z_0 hebbar, wenn es so einen Radius $r_1 > 0$ gibt, dass $D_1 := B(z_0, r_1) \setminus \{z_0\}$ in D liegt und f auf D_1 beschränkt ist. (Riemannscher Hebbarkeitssatz)*

b) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

i) *z_0 ist ein Pol von f .*

ii) *Es gibt solche Zahlen $r_2, c_1, c_2 > 0$ und $m \in \mathbb{N}$, dass $D_2 := B(z_0, r_2) \setminus \{z_0\}$ in D liegt und die Ungleichungen*

$$c_1 |z - z_0|^{-m} \leq |f(z)| \leq c_2 |z - z_0|^{-m}$$

für alle $z \in D_2$ gelten.

iii) *Es gibt Zahlen $r_3 > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $D_3 := B(z_0, r_3) \setminus \{z_0\} \subseteq D$, sowie eine Funktion $g \in H(B(z_0, r_3))$ mit*

$$g(z_0) \neq 0 \quad \text{und} \quad f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z)$$

für alle $z \in D_3$.

iv) *Es gibt so einen Radius $r_4 > 0$, dass D die Menge $D_4 := B(z_0, r_4) \setminus \{z_0\}$ enthält, $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D_4$ ist und $h_0 := \frac{1}{f} : D_4 \rightarrow \mathbb{C}$ eine Fortsetzung $h \in H(B(z_0, r_4))$ besitzt, die bei z_0 eine Nullstelle der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ hat.*

In diesem Fall stimmen die Zahlen m in den Aussagen ii)–iv) überein. Dieses $m \in \mathbb{N}$ heißt Polordnung von f bei z_0 .

c) *Genau dann ist z_0 wesentlich, wenn für jedes $r > 0$ mit $D_r := B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subseteq D$ das Bild $f(D_r)$ dicht in $\mathbb{C}$ ist. (Satz von Casorati-Weierstraß)*

Das obige Theorem ist im Reellen falsch. So ist etwa die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, beschränkt, besitzt aber in $x_0 = 0$ nicht einmal eine stetige Fortsetzung. Ferner strebt $g(x) = |x|^{-3/2} \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow 0$. Andererseits gilt

$$|x|^k g(x) \rightarrow \begin{cases} +\infty, & k = 1, \\ 0, & k \in \{2, 3, \dots\}, \end{cases} \quad \text{für } x \rightarrow 0,$$

sodass $x_0 = 0$ für g keine ganzzahlige Polordnung hat.

BEWEIS. a) Seien z_0 hebbar, sowie $r > 0$ und $\tilde{f}$ wie in Definition 3.1 a). Nach dem Satz vom Maximum ist dann $\tilde{f}$ auf $\overline{B}(z_0, r/2)$ beschränkt, sodass die Bedingung in Teil a) mit $r_1 = r/2$ gilt.

Sei umgekehrt f auf $B(z_0, r_1) \setminus \{z_0\} \subseteq D$ beschränkt. Wir definieren $U = D \cup \{z_0\}$ und die Hilfsfunktion

$$g : U \rightarrow \mathbb{C}; \quad g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z), & z \in D, \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$$

Man beachte, dass U in $\mathbb{C}$ offen und g auf D holomorph ist. Weiter konvergiert

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = (z - z_0)f(z) \longrightarrow 0$$

für $z \rightarrow z_0$, da f bei z_0 beschränkt ist. Also liegt g in $H(U)$ und erfüllt $g'(z_0) = 0 = g(z_0)$. Theorem 2.12 liefert somit die Potenzreihendarstellung

$$g(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

auf $B(z_0, r_1) \subseteq U$. Wir definieren nun die Funktion

$$\tilde{f} : B(z_0, r_1) \rightarrow \mathbb{C}; \quad \tilde{f}(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n-2} = (z - z_0)^{-2} g(z) = f(z),$$

wobei wir für die zweite und dritte Gleichung $z \neq z_0$ annehmen. Als Potenzreihe ist $\tilde{f}$ holomorph, und Aussage a) ist gezeigt.

b) Es gelte Aussage i). Wir zeigen iv). Gemäß Voraussetzung gibt es so einen Radius $r_4 > 0$, dass $D_4 := B(z_0, r_4) \setminus \{z_0\}$ in D liegt und $\min_{D_4} |f| \geq 1$ ist. Somit liegt $h_0 := 1/f$ in $H(D_4)$ und ist beschränkt. Also besitzt h_0 nach Behauptung a) und ihrem Beweis eine holomorphe Fortsetzung h auf $B(z_0, r_4)$. Da $|f(z)| \rightarrow +\infty$ für $z \rightarrow z_0$ konvergiert, hat h in z_0 eine Nullstelle. Korollar 2.22 zeigt schließlich die behauptete Nullstellenordnung in Teil iv).

Wir folgern Behauptung iii) aus iv). Wegen Korollar 2.22 und Bemerkung 2.23 liefert Aussage iv) einen Radius $r_3 \in (0, r_4]$ und eine Funktion $\varphi \in H(B(z_0, r_3))$ mit $\varphi(z) \neq 0$ und $h(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$ für $z \in B(z_0, r_3)$. Somit erfüllt der Kehrwert $g := 1/\varphi$ die Aussage iii).

Wie in Bemerkung 2.23 schließen wir Teil ii) aus iii) mittels der Stetigkeit von $|g|$. Die Implikation von ii) nach i) ist klar.

c) Wenn die charakterisierende Bedingung in c) gilt, dann ist z_0 offenbar wesentlich. Wir nehmen an, dass diese Bedingung nicht erfüllt ist. Es gibt also einen Radius $r > 0$ mit $D_r := B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subseteq D$ und einen Punkt $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(D_r)}$, woraus $0 < \delta := \inf_{z \in D_r} |w - f(z)|$ folgt. Also ist die Funktion

$$g_0 : D_r \rightarrow \mathbb{C}; \quad g_0(z) = \frac{1}{f(z) - w},$$

holomorph, nirgends gleich 0 und beschränkt durch $1/\delta$. Gemäß Schritt a) ist g_0 holomorph fortsetzbar auf $B(z_0, r)$. Demnach besitzt $f = w + 1/g_0$ eine holomorphe Fortsetzung, wenn $g(z_0) \neq 0$ ist, bzw. einen Pol bei z_0 im Falle $g(z_0) = 0$ nach Teil b). Also gilt Aussage c). $\square$

Die obigen Charakterisierungen liefern eine Reihe von Instrumenten gerade für die Bestimmung von Polordnungen. Wir diskutieren einige einfache Beispiele. Es sei erwähnt, dass das Einsetzen der jeweiligen Potenzreihen oft einen guten Hinweis

auf das Verhalten einer Funktion bei einer Singularität gibt, auch wenn es dann bequemer sein kann, Theorem 3.3 für den Beweis heranzuziehen.

BEISPIEL 3.4. a) Sei $f : D := B(0, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = \frac{1}{1-\cos z}$. Hier ist $z_0 = 0$ ein Pol zweiter Ordnung von f .

BEWEIS. In einer Übung wurde gezeigt, dass der Kosinus in $\mathbb{C}$ den Wert 1 nur bei $z = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ annimmt. Die Funktion $h_0 := 1/f : D \rightarrow \mathbb{C}$ hat die holomorphe Fortsetzung $h = 1 - \cos$ auf $\mathbb{C}$. Weiter gelten $h(0) = 0 = h'(0)$ und $h''(0) = 1$, sodass die Nullstelle 0 von h die Ordnung 2 hat. Die Behauptung folgt nun aus Theorem 3.3 b). $\square$

b) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}$. Dann ist 0 eine wesentliche Singularität von f . Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kann f mit $\tilde{f}(0) = 0$ zu einer differenzierbaren Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

BEWEIS. Für $x \in \mathbb{R}$ haben wir $|f(x)| \leq x^2 \rightarrow 0$ und

$$|f(ix)| = \frac{x^2}{2} \left| e^{\frac{i}{ix}} - e^{-\frac{i}{ix}} \right| = \frac{x^2}{2} \left(e^{\frac{1}{|x|}} - e^{-\frac{1}{|x|}} \right) \rightarrow +\infty$$

für $x \rightarrow 0$, wobei Satz 3.33 aus Analysis 1 einging. Also ist 0 wesentlich. Reell konvergiert hingegen

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0. \quad \square$$

c) Sei $f : D := B(0, \pi) \setminus \{0\}$; $f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$. Dann hat f in $z_0 = 0$ einen Pol erster Ordnung.

BEWEIS. Laut einer Übung hat der Sinus auch in $\mathbb{C}$ die Nullstellenmenge $\pi\mathbb{Z}$. Wir schreiben f als

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{z}{\sin z} \cos z =: \frac{1}{z} g_0(z).$$

Nach Beispiel 3.2 konvergiert $g_0(z) \rightarrow 1$ für $z \rightarrow 0$, sodass g_0 laut Theorem 3.3 a) eine holomorphe Fortsetzung in 0 hat. Somit zeigt Theorem 3.3 b) die Aussage. $\square$

Mit dem bislang gezeigten Sätzen können wir nun das erstaunliche Resultat zeigen, dass injektive holomorphe Funktionen stets biholomorph sind.

THEOREM 3.5. Sei $f \in H(D)$ injektiv. Dann ist $D' := f(D) \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow D'$ ist biholomorph.

BEWEIS. 1) Da f injektiv ist, kann es auf keiner Kugel in D konstant sein. Theorem 2.28 zeigt somit die Offenheit von $D' = f(D)$. Ferner bildet f offene Teilmengen von D auf offene Mengen in D' ab. Somit ist f^{-1} stetig laut einer Bemerkung nach Theorem 2.49 in Analysis 2. Wir müssen noch die Holomorphie von $f^{-1} : D' \rightarrow \mathbb{C}$ nachweisen.

2) Wir setzen $N = \{z \in D \mid f'(z) = 0\}$ und $N' = f(N)$. Für jedes $z \in D \setminus N$ liefert Satz 1.9 eine Umgebung, auf der f biholomorph ist. Da $f : D \rightarrow D'$ bijektiv

ist, gilt $f(D \setminus N) = D' \setminus N'$. Demnach ist f^{-1} bei jedem Punkt in $D' \setminus N'$ komplex differenzierbar.

3) Wir wollen zeigen, dass N' diskret ist. Für einen Widerspruch nehmen wir an, es gäbe Zahlen $w_n \in N'$ und $w_0 \in D'$ mit $w_n \neq w_0$ für $n \in \mathbb{N}$ und $w_n \rightarrow w_0$ für $n \rightarrow +\infty$. Wir setzen $z_n = f^{-1}(w_n) \in N$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Schritt 1) konvergiert die Folge (z_n) gegen $f^{-1}(w_0) =: z_0$ in D . Aufgrund der Injektivität von f^{-1} ist z_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ ungleich z_0 . Der Identitätssatz 2.21 impliziert nun, dass die holomorphe Funktion f' auf einer Kugel in D um z_0 verschwindet. Wegen Satz 1.22 ist f auf dieser Kugel konstant. Dieser Widerspruch zeigt, dass N' diskret ist.

4) Gemäß der Schritte 2) und 3) ist jedes $w \in N'$ eine isolierte Singularität von f^{-1} . Da diese Funktion nach 1) bei jedem $w \in N'$ beschränkt ist, liefert der Riemannsche Hebbarkeitssatz 3.3 a) die geforderte Holomorphie von $f^{-1} : D' \rightarrow \mathbb{C}$. $\square$

BEMERKUNG 3.6. a) Im Vergleich zu unserem Satz 1.9 oder Korollar 3.37 in Analysis 2 fällt im obigen Theorem die Bedingung $f'(z) \neq 0$ für $z \in D$ weg. Die Injektivität kann andererseits nicht durch diese Bedingung ersetzt werden (z.B. ist $\exp = \exp'$ auf $\mathbb{C}$ ungleich 0, aber nicht injektiv).

b) Im Reellen reicht die Injektivität für einen analogen Satz nicht aus. So ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^3$, bijektiv und C^∞ , aber die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0, \\ -\sqrt[3]{-x}, & x < 0, \end{cases}$$

ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. $\diamond$

Bei isolierten Singularitäten besitzen holomorphe Funktionen verallgemeinerte Potenzreihenentwicklungen, die wir als nächstes einführen. Im nachfolgenden Hauptsatz liefern sie eine schöne Ergänzung von Theorem 3.3.

DEFINITION 3.7. Seien $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{Z}$ und $c \in \mathbb{C}$. Wir sagen, dass die Laurentreihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z - c)^n$ für ein $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, wenn die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - c)^n & \quad (\text{regulärer Anteil}) \quad \text{und} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z - c)^{-n} & \quad (\text{singulärer Anteil}) \end{aligned}$$

in $\mathbb{C}$ existieren. Man setzt dann

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - c)^n := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - c)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z - c)^{-n}.$$

Analog erklärt man die absolute bzw. die gleichmäßige Konvergenz der Laurentreihe.

THEOREM 3.8. Seien $f \in H(D)$, $n \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ und $R > 0$ mit $D_0 := B(z_0, R) \setminus \{z_0\} \subseteq D$. Für $r \in (0, R)$ setzen wir $k_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$; $k_r(t) = z_0 + re^{it}$, und

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{k_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw. \quad (3.1)$$

Dann konvergiert die Laurentreihe

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

absolut und gleichmäßig auf Kompakta in D_0 gegen f . Die Koeffizienten a_n sind dabei eindeutig bestimmt und insbesondere unabhängig von $r \in (0, R)$.

BEWEIS. 1) *Existenz.* a) Sei $K \subseteq D_0$ kompakt. Dann gibt es solche Zahlen $0 < s < s + \delta < t - \delta < t < R$, dass die Ungleichungen $s + \delta \leq |z - z_0| \leq t - \delta$ für alle $z \in K$ gelten. Sei $z \in K$. Wir setzen $\theta = \arg(z - z_0)$ und

$$\begin{aligned} L_\varphi &= \{z_0 + \tau e^{i\varphi} \mid \tau \in [s, t]\}, \\ K_\rho^1 &= \{z_0 + \rho e^{i\alpha} \mid \alpha \in [\theta - \frac{\pi}{2}, \theta + \frac{\pi}{2}]\}, \\ K_\rho^2 &= \{z_0 + \rho e^{i\alpha} \mid \alpha \in [\theta + \frac{\pi}{2}, \theta + \frac{3\pi}{2}]\} \end{aligned}$$

für $\varphi \in \mathbb{R}$ und $\rho \in \{s, t\}$. Diese Kurven werden wie angegeben parametrisiert. Wir definieren nun die beiden Wege

$$\Gamma_1 = K_t^1 \cup L_{\theta+\frac{\pi}{2}}^- \cup (K_s^1)^- \cup L_{\theta-\frac{\pi}{2}}^- \quad \text{und} \quad \Gamma_2 = K_t^2 \cup L_{\theta-\frac{\pi}{2}}^- \cup (K_s^2)^- \cup L_{\theta+\frac{\pi}{2}}^-.$$

(Skizze!) Hierbei ist Γ_2 in $D_0 \setminus \{z\}$ nullhomotop und Γ_1 ist in $D_0 \setminus \{z\}$ homotop zu der Kreislinie $\partial B(z, \varepsilon)$ für jeden Radius $\varepsilon > 0$ mit $\overline{B}(z, \varepsilon) \subseteq D_0$.

b) Wegen Teil a) implizieren Cauchys Integralformel und -satz in der homotopen Version vom Theorem 2.33 die Gleichungen

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{k_t} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{k_s} \frac{f(w)}{w - z} dw =: f_1(z) + f_2(z). \end{aligned}$$

Laut Satz 1.21 definieren die obigen Integrale nebst Vorfaktoren $\frac{1}{2\pi i}$ bzw. $-\frac{1}{2\pi i}$ die holomorphen Funktionen

$$f_1 : B(z_0, t) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{und} \quad f_2 : \mathbb{C} \setminus \overline{B}(z_0, s) \rightarrow \mathbb{C}.$$

c) Der Entwicklungssatz 2.12 und Satz 1.21 liefern die Potenzreihe

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{a}_n (z - z_0)^n \quad \text{mit} \quad \tilde{a}_n = \frac{f_1^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{k_t} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

für $n \in \mathbb{N}_0$, wobei die Reihe absolut und gleichmäßig auf $\overline{B}(z_0, t - \delta)$ konvergiert.

Um f_2 zu behandeln, modifizieren wir den Beweis von Theorem 2.12. Für $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| \geq s + \delta$ und $|w - z_0| = s$ gilt die Ungleichung

$$\frac{|w - z_0|}{|z - z_0|} \leq \frac{s}{s + \delta} =: q < 1.$$

Satz 1.21 erlaubt nun die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{k_s} \frac{f(w)}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{k_s} \frac{f(w)}{z - z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(w - z_0)^k}{(z - z_0)^k} dw \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k_s} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{-k}} dw (z - z_0)^{-k-1}. \end{aligned}$$

Wir setzen $n = -k - 1 \in \{-1, -2, \dots\}$ und schreiben $\tilde{a}_n$ für das letzte Integral samt Vorfaktor. Die obige Reihe konvergiert nach dem Majorantenkriterium absolut und gleichmäßig auf $\mathbb{C} \setminus B(z_0, s + \delta)$. Somit konvergieren die Reihen für f_1 und f_2 absolut und gleichmäßig auf K . Nach Theorem 2.33 kann man in den definierenden Integralen von $\tilde{a}_n$ die Radien t bzw. s durch jedes $r \in (0, R)$ ersetzen. Insgesamt konvergiert die Laurentreihe von f absolut und kompakt auf D_0 , und (3.1) gilt.

2) *Eindeutigkeit.* Seien $r \in (0, R)$ und $b_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{Z}$ derart, dass $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$ mit absoluter und gleichmäßiger Konvergenz auf $k_r([0, 2\pi])$ gilt. Sei $m \in \mathbb{Z}$. Dann liefern (3.1) und Satz 1.21 die Identität

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{k_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{m+1}} dw = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{b_n}{2\pi i} \int_{k_r} (w - z_0)^{n-m-1} dw.$$

Nach Beispiel 1.20 ist das letzte Integral für $n = m$ gleich $2\pi i$ und sonst gleich 0. Es folgt wie gefordert $b_m = a_m$. $\square$

KOROLLAR 3.9. Seien $f \in H(D)$, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ und $R > 0$ mit $D_0 := B(z_0, R) \setminus \{z_0\} \subseteq D$, sowie a_n für $n \in \mathbb{Z}$ durch (3.1) gegeben. Dann gelten die folgenden Äquivalenzen.

- a) z_0 ist genau dann hebbbar, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$ ist.
- b) z_0 ist genau dann ein Pol m -ter Ordnung (mit $m \in \mathbb{N}$), wenn $a_{-m} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -m$ gelten.
- c) z_0 ist genau dann wesentlich, wenn es Indizes $n_j \rightarrow -\infty$ mit $a_{n_j} \neq 0$ gibt.

BEWEIS. b) Laut Theorem 3.3 ist der Punkt z_0 genau dann ein Pol m -ter Ordnung, wenn er eine hebbare Singularität der Funktion

$$g : D_0 \rightarrow \mathbb{C}; \quad g(z) = (z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{k-m} (z - z_0)^k$$

ist, wobei die (auch mit g bezeichnete) holomorphe Fortsetzung einen Wert $a_{-m} = g(z_0) \neq 0$ besitzt. Hier haben wir auch die Laurentreihe von f aus Theorem 3.8 eingesetzt. Der Entwicklungssatz 2.12 liefert mit der Potenzreihe eine weitere

Laurentreihe für g um z_0 . Wegen der Eindeutigkeitsaussage in Theorem 3.8 ist somit $a_n = 0$ für alle $n < -m$ und $a_{-m} \neq 0$. Also gilt Behauptung b).

Die Aussage a) zeigt man entsprechend. Teil c) folgt direkt aus a) und b). $\square$

Wir illustrieren dieses Korollar mit zwei einfachen Beispielen, in denen man mit bekannten Reihen die Laurentreihe berechnen und dann den Typ der Singularität ablesen kann.

BEISPIEL 3.10. a) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ liefert die Exponentialreihe die Laurententwicklung

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{-k}}{k!} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{z^n}{(-n)!}.$$

b) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$; $f(z) = z^{-6}(\cos(z) - 1)$. Aufgrund der Kosinusreihe hat f die Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} z^{2j-6} = -\frac{1}{2}z^{-4} + \frac{1}{4!}z^{-2} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!}z^2 - \dots$$

für $z \neq 0$. Laut Korollar 3.9 ist somit $z_0 = 0$ ein Pol vierter Ordnung. $\diamond$

3.2. Residuen und reelle Integrale

In Beispiel 1.20 haben wir gesehen, dass das Integral von z^n über $\partial B(0, 1)$ nur für $n = -1$ ungleich 0 ist. Wenn man nun die Laurentreihe einer Funktion f in ein Kurvenintegral über f um die isolierte Singularität einsetzt, sollte demnach nur der Summand mit $n = -1$ einen Beitrag liefern. Dies motiviert den nächsten Begriff.

DEFINITION 3.11. Seien $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ eine isolierte Singularität von $f \in H(D)$ und a_n für $n \in \mathbb{Z}$ die Koeffizienten der Laurentreihe von f um z_0 aus (3.1). Das Residuum von f bei z_0 ist die Zahl

$$\text{Res}(f, z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} f(w) dw,$$

wobei $\overline{B}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ in D liegt.

Der folgende *Residuensatz* nutzt die eingangs erwähnte Idee aus, um Integrale zu berechnen.²

THEOREM 3.12. Seien γ mit Bild Γ in der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ nullhomotop, $A = \{z_1, \dots, z_m\} \subseteq U$ mit $A \cap \Gamma = \emptyset$, $D = U \setminus A$ und $f \in H(D)$. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}(f, z_j) n(\gamma, z_j).$$

²In der Vorlesung wurde nur ein Spezialfall des Theorems bewiesen. Die Version hier wurde lediglich an anderer Stelle kurz erwähnt.

BEWEIS. Es gibt Radien $r_j > 0$ mit $D_j := B(z_j, r_j) \setminus \{z_j\} \subseteq D$ für $j \in \{1, \dots, m\}$. Auf D_j betrachten wir den singulären Teil

$$g_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z_j)(z - z_j)^{-n}$$

der Laurentreihe von f um z_j . Gemäß des Beweises von Theorem 3.8 hat g_j eine gleich bezeichnete holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$. Wir setzen $h_0 = f - g_1 - \dots - g_m$ auf D . Auf D_j ist $f - g_j$ eine Potenzreihe, und wegen Theorem 3.3 a) hat h_0 somit eine Fortsetzung $h \in H(U)$. Theorem 2.33 a) liefert nun $\int_{\gamma} h = 0$, weil γ nullhomotop ist. Da alle Funktionen auf Γ stetig sind, erhalten wir

$$\int_{\gamma} f \, dz = \sum_{j=1}^m \left(a_{-1}(z_j) \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z_j} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{-n}(z_j) \int_{\gamma} \frac{dw}{(w - z_j)^n} \right).$$

Die Integrale für $n \geq 2$ verschwinden, da der Integrand die Stammfunktion $(w - z_j)^{1-n}/(1-n)$ auf $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$ hat. Die Behauptung folgt dann aus Definition 3.11 und (1.11). $\square$

Gemäß des nächsten Hilfssatzes kann man Residuen für Pole bequem berechnen, wenn man die Polordnung kennt. Erst solche Aussagen machen den Residuensatz zu einem nützlichen Instrument. (Die Übungen behandeln verwandte Resultate.)

LEMMA 3.13. Seien z_0 ein Pol m -ter Ordnung von $f \in H(D)$ und g die holomorphe Fortsetzung von $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ auf einen Kreis $B(z_0, r) \subseteq D$, siehe Theorem 3.3. Dann gelten

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz} \left((z - z_0)^m f(z) \right),$$

und somit für $m = 1$

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

BEWEIS. Korollar 3.9 und Theorem 3.8 liefern die Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n+m}$$

von g auf $B(z_0, r)$. Mittels Satz 1.3 berechnen wir die Ableitung

$$g^{(m-1)}(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty} (n+m) \cdot \dots \cdot (n+2) a_n (z - z_0)^{n+1}.$$

Also gilt $g^{(m-1)}(z_0) = (m-1)! a_{-1}$. Die zweite Gleichung in der Behauptung folgt dann aus der Stetigkeit von $g^{(m-1)}$. $\square$

Mit dem Residuensatz (oder oft nur mit Cauchys Integralsatz- und formel) kann man eine Reihe von reellen Integrale berechnen, für die man keine Stammfunktion kennt. Dies und die dazugehörigen Techniken sind in einigen Bereichen der Analysis

von großer Bedeutung. Hier und in den Übungen diskutieren wir einige typische Beispiele. Im ersten genügt es, den Integranden geschickt umzuformen.

BEISPIEL 3.14. Sei $a > 1$. Dann gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{a + \cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

BEWEIS. Das Integral existiert, da der Integrand stetig ist und wir über ein kompaktes Intervall integrieren. Um es mittels komplexer Methoden zu berechnen, schreiben wir den Kosinus um und fügen die Parametrisierung $z = \gamma(t) = e^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$, des Einheitskreises ein. Dies führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{a + \cos t} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{a + \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})} = \frac{2}{i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{it}}{2ae^{it} + (e^{it})^2 + 1} dt \\ &= \frac{2}{i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = \frac{4\pi}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(z - z_2)^{-1}}{z - z_1} dz \end{aligned}$$

für die Nullstellen $z_{1/2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ des Nennerpolynoms $z^2 + 2az + 1$. Man beachte, dass z_1 in $(-1, 0)$ liegt und $z_2 < -a < -1$ ist. Also ist der Zähler $f(z) = (z - z_2)^{-1}$ holomorph auf $B(0, a)$. Cauchys Integralformel (2.2) liefert nun

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{a + \cos t} = \frac{4\pi}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \quad \square$$

In den nächsten beiden Beispielen integriert man über unbeschränkte Intervalle. Diese schneidet man ab und ergänzt sie so zu geschlossenen Wegen, dass man die zugehörigen Kurvenintegrale mittels des Residuensatzes (oder der Cauchyschen Sätze) berechnen kann. Dann führt man einen Grenzübergang aus, in dem das hinzugefügte Teil-Kurvenintegral verschwindet.

BEISPIEL 3.15. Sei $\tau \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\tau x}}{1 + x^2} dx = \pi e^{-|\tau|}.$$

BEWEIS. Das Integral existiert wegen der auf $\mathbb{R}$ integrierbaren Majoranten $(1 + x^2)^{-1}$. Sei zuerst $\tau \geq 0$. Wir setzen den Integranden auf naheliegende Weise durch

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} \rightarrow \mathbb{C}; \quad f(z) = \frac{e^{i\tau z}}{1 + z^2} = \frac{e^{i\tau z}}{(z - i)(z + i)}$$

holomorph fort. Für $r > 1$ betrachten wir den Weg $\gamma_r = [-r, r] \cup k_r$ mit $k_r = re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, der den Pol i erster Ordnung von f positiv umläuft. Dabei ist γ_r etwa auf der Menge $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im} z > -1/2\}$ homotop zum Dreiecksweg $\partial\Delta(-r, r, ir)$, vergleiche Beispiel 2.32. Mittels des Lebesgueschen Konvergenzsatzes erhalten wir zunächst

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\tau x}}{1 + x^2} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \frac{e^{i\tau x}}{1 + x^2} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\int_{\gamma_r} f dz - \int_{k_r} f dz \right).$$

Der Residuensatz 3.12 und Lemma 3.13 implizieren

$$\int_{\gamma_r} f \, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{e^{iz}}{(z - i)(z + i)} = 2\pi i \frac{e^{-\tau}}{2i} = \pi e^{-\tau}.$$

Man kann hier auch direkt die Cauchyformel verwenden, vergleiche Beispiel 3.14. Das Restintegral kontrollieren wir durch die Ungleichung

$$\begin{aligned} \left| \int_{k_r} f \, dz \right| &\leq \ell(k_r) \sup_{0 \leq t \leq \pi} |f(re^{it})| \leq \pi r \sup_{0 \leq t \leq \pi} \frac{\exp(r\tau \operatorname{Re}(i \cos t + i^2 \sin t))}{|re^{it}|^2 - 1} \\ &= \frac{\pi r}{r^2 - 1} \sup_{0 \leq t \leq \pi} e^{-r\tau \sin t} = \frac{\pi r}{r^2 - 1}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite strebt für $r \rightarrow +\infty$ gegen 0, sodass die Behauptung für $\tau \geq 0$ gezeigt ist. (Dieses Vorgehen beruht wesentlich auf dem richtigen Vorzeichen im Exponenten und den Potenzen der Terme mit r .)

Den Fall $\tau < 0$ kann man auf den obigen zurückführen, indem man $s = -x$ im gegebenen Integral substituiert. $\square$

BEISPIEL 3.16. Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1 + x^4} \, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

BEWEIS. Das Integral existiert, da der Integrand für $|x| \leq 1$ durch 1 und für $|x| \geq 1$ durch x^{-2} beschränkt ist. Wir setzen wie oben den Integranden zu

$$f(z) = \frac{z^2}{1 + z^4} = \frac{z^2}{\prod_{k=0}^3 (z - z_k)}$$

auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ holomorph fort. Dabei erfüllen die Nullstellen des Nenners $z_k^4 = -1$; sie sind also gleich $z_k = \exp(i(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}))$. Insbesondere hat f vier Pole erster Ordnung. Wir verwenden den Weg $\gamma_r = [-r, r] \cup k_r$ mit $r > 1$ aus Beispiel 3.15. Dieser umläuft z_0 und z_1 . Lemma 3.13 und etwas Rechnung liefern die Formeln

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{z_0^2}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)(z_0 - z_3)} = \frac{\sqrt{2}}{4(1 + i)},$$

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{\sqrt{2}}{4(i - 1)}.$$

Also zeigt der Residuensatz 3.12 die Gleichung

$$\int_{\gamma_r} f \, dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, z_0) + \operatorname{Res}(f, z_1)) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Auf der anderen Seite erhalten wir wie in Beispiel 3.15

$$\left| \int_{k_r} f \, dz \right| \leq \pi r \sup_{z \in k_r([0, \pi])} \frac{|z|^2}{|z|^4 - 1} = \frac{\pi r^3}{r^4 - 1}.$$

Da dies für $r \rightarrow +\infty$ verschwindet, folgt wieder

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \frac{x^2}{1+x^4} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\int_{\gamma_r} f dz - \int_{\bar{\gamma}_r} f dz \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \square$$

Zum Lösen nichtlinearer Gleichungen im $\mathbb{R}^m$ mit $m \geq 2$ haben wir in Analysis 2 den Hauptsatz über implizit definierten Funktionen kennengelernt. Dieser liefert aber nur Lösungen in der Nähe einer schon vorhandenen. Für globale Aussagen benötigt man andere Techniken. Die komplexe Analysis stellt solche im Falle $m = 2$ bereit. Diese beruhen oft auf dem folgenden *Argumentprinzip*.³

THEOREM 3.17. *Seien $f \in H(D)$, $z_1, \dots, z_n \in D$ alle Nullstellen von f , $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ ihre Ordnungen und γ eine in D nullhomotope geschlossene Kurve, auf deren Bild Γ kein z_j liegt. Dann gilt die Formel*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n m_j n(\gamma, z_j).$$

BEWEIS. Die Voraussetzung, Korollar 2.22 und Bemerkung 2.23 liefern solche Radien $r_j > 0$ mit $\bar{B}(z_j, r_j) \setminus \{z_j\} \subseteq D \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ und Funktionen $g_j \in H(B(z_j, r_j))$, dass $g_j(z) \neq 0$ und $f(z) = (z - z_j)^{m_j} g_j(z)$ für alle $z \in B(z_j, r_j)$ gelten. Wir berechnen

$$\begin{aligned} f'(z) &= m_j(z - z_j)^{m_j-1} g_j(z) + (z - z_j)^{m_j} g_j'(z), \\ \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{m_j}{z - z_j} + \frac{g_j'(z)}{g_j(z)} \end{aligned}$$

für alle $z \in B(z_j, r_j)$, wobei in der zweiten Zeile $z \neq z_j$ sein soll. Da der letzte Summand bei z_j beschränkt ist, hat f'/f den Pol erster Ordnung z_j mit Residuum m_j . Die Aussage folgt somit aus dem Residuensatz 3.12. $\square$

Der folgende *Satz von Rouché* dient zum Lösen nichtlinearer Gleichungen.

KOROLLAR 3.18. *Seien $f \in H(D)$, $z_j \in \mathbb{C}$, $m_j \in \mathbb{N}$ und der Weg γ mit Bild Γ wie in Theorem 3.17. Weiter erfülle $g \in H(D)$ die Ungleichung*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad (3.2)$$

für alle $z \in \Gamma$. Seien $w_1, \dots, w_\nu$ die Nullstellen mit Vielfachheiten $\mu_k \in \mathbb{N}$ von g im von γ umschlossenen Gebiet. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^n m_j = \sum_{k=1}^{\nu} \mu_k.$$

³In der Vorlesung wurde nur ein Spezialfall des Theorems und des folgenden Korollars bewiesen. Die Versionen hier wurden lediglich an anderer Stelle kurz erwähnt.

BEWEIS. Da f und g stetig sind und Γ kompakt ist, gibt es eine offene Menge U mit $\Gamma \subseteq U \subseteq D$, auf der (3.2) auch gilt. Sei $z \in U$. Aus (3.2) folgen $f(z) \neq 0$ und $g(z) \neq 0$, sowie

$$\left| 1 - \frac{f(z)}{g(z)} \right| = \frac{|g(z) - f(z)|}{|g(z)|} < 1 + \frac{|f(z)|}{|g(z)|}.$$

Wenn $\frac{f(z)}{g(z)}$ nichtpositiv wäre, würde hier Gleichheit herrschen. Also liegt $\frac{f(z)}{g(z)}$ für alle $z \in U$ in Σ_π , sodass $h := \log(f/g)$ auf U holomorph ist. Dabei gilt

$$h' = \frac{g}{f} \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}.$$

Satz 2.3 impliziert nun

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h' dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'}{g} dz.$$

Somit folgt die Behauptung aus dem Argumentprinzip Theorem 3.17. $\square$

BEISPIEL 3.19. Sei $\lambda > 1$. Dann hat die Gleichung $\lambda = z + e^{-z}$ genau eine Lösung $z \in \mathbb{C}_+$. Diese ist reell.

BEWEIS. Wie in Analysis 1 erhält man eine reelle Lösung $x > 0$. Es bleibt zeigen, dass die Gleichung in $\mathbb{C}_+$ genau eine Lösung besitzt. Wir setzen in Hinblick auf den Satz von Rouché $g(z) = \lambda - z - e^{-z}$ und $f(z) = \lambda - z$ für $z \in D := \mathbb{C}_+$. Offenbar hat f nur die (einfache) Nullstelle $z_1 = \lambda$. Wir wählen nun $r > \lambda$, $\varepsilon \in (0, \lambda - 1)$ und den Weg $\partial B(r, r - \varepsilon)$ mit der Parametrisierung $\gamma(t) = r + (r - \varepsilon)e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Es gelten $\lambda \in B(r, r - \varepsilon) \subseteq \mathbb{C}_+$ und

$$|f(z) - g(z)| = e^{-\operatorname{Re} z} < 1 < \lambda - \varepsilon = r - \varepsilon - (r - \lambda) = |z - r| - |r - \lambda| \leq |z - \lambda| = |f(z)|$$

für alle $z \in \partial B(r, r - \varepsilon)$. Nach Korollar 3.18 hat also g in $B(r, r - \varepsilon)$ genau eine einfache Nullstelle. Im Limes $r \rightarrow +\infty$ und $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt dann die Behauptung. $\square$

KAPITEL 4

Grundlagen der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen

Von nun an seien stets $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall positiver Länge, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und nichtleer, sowie $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^m$ oder $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig.

4.1. Einführung

Seien $u_0 \in D$ und $t_0 \in J$ gegeben. Wir suchen ein Intervall $J_0 \subseteq J$ positiver Länge mit $t_0 \in J_0$ und eine Funktion $u \in C^1(J_0, \mathbb{R}^m)$, deren Werte alle in D liegen und die der *gewöhnlichen Differentialgleichung*

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in J_0, \quad (4.1)$$

genügt. Dann heißt u eine *Lösung von (4.1) auf J_0* . Meist fordern wir zusätzlich

$$u(t_0) = u_0, \quad (4.2)$$

und nennen (4.1) und (4.2) ein *Anfangswertproblem*. Der Name rührt daher, dass häufig t_0 gleich $\min J$ ist. Man schreibt dann vereinfachend $t \geq t_0$ in (4.1). Allerdings treten auch die anderen Fälle $t_0 \in J^\circ$ und $t_0 = \max J$ in manchen Argumenten auf. Man nennt (4.1) *autonom*, wenn f nicht explizit von t abhängt. In diesem Fall wählt man meist $t_0 = 0$ und $J = \mathbb{R}$. In den Beispielen wird er im Vordergrund stehen, und in einigen Aussagen formulieren wir explizit die einfacheren Varianten für autonome Probleme (oder für $D = \mathbb{R}^m$).

Wir interpretieren $u(t) \in D$ als Zustand eines Systems zur Zeit t und u_0 als Anfangszustand. Die Funktion f legt fest, wie die momentane Zustandsänderung $u'(t)$ vom aktuellen Zustand $u(t)$ abhängt. Dabei ist $u'(t)$ auch der Tangentenvektor der Kurve $t \mapsto u(t)$. Zum Beispiel könnte $u(t)$ der Vektor der Konzentrationen $u_j(t) \geq 0$ zur Zeit t von m Spezies eines Reaktionssystems in der Chemie sein. Dann ergibt sich f aus den Reaktionsgesetzen und -konstanten, vergleiche Beispiel 4.13. Diese Konstanten (oder auch vorgegebene Zu- und Abflüsse) können natürlich von der Zeit abhängen, was zu nichtautonomen Problemen führt. (Das Intervall J ist hier die Zeitspanne, für diese man die Parameter vorab kennt.)

Differentialgleichungen treten aber auch in anderen Kontexten als Hilfsprobleme auf (etwa in den partiellen Differentialgleichungen oder in der Geometrie). Eine wichtige andere Interpretation von (4.1) wird in Abschnitt 4.4 diskutiert.

In Analysis 2 haben wir die zwei Situationen diskutiert, in denen man die Lösungen oft explizit berechnen kann: In Abschnitt 1.4 skalare Probleme mit

$f(t, x) = g(t)h(x) \in \mathbb{R}$ ('Trennung der Variablen') und in Abschnitt 5.3 lineare autonome Systeme mit $f(x) = Ax$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Für andere Fälle muss man eine Theorie entwickeln, die ohne explizite Lösungsformeln auskommt. Die beiden folgenden Beispiele verdeutlichen dabei auftretende Schwierigkeiten.

Aus Beispiel 1.32 in Analysis 2 wissen wir, dass das Problem

$$u'(t) = \sqrt{u(t)}, \quad t \geq 0; \quad u(0) = 0, \quad (4.3)$$

unendlich viele Lösungen hat, nämlich $u_\infty(t) = 0$ und

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a, \\ \frac{1}{4}(t-a)^2, & a < t, \end{cases}$$

für jedes $a \geq 0$. In Theorem 5.7 aus Analysis 2 haben wir aber gesehen, dass Lösungen eindeutig sind, wenn f lokal Lipschitz in x ist, siehe Definition 4.2. Weiter explodiert die Lösung $u(t) = \left(\frac{1}{u_0} - t\right)^{-1}$ von

$$u'(t) = u(t)^2, \quad t \geq 0; \quad u(0) = u_0 > 0, \quad (4.4)$$

für $t \rightarrow 1/u_0$. Es gibt Bedingungen an f , die einen solchen 'blowup' ausschließen (z.B. in Satz 5.9 aus Analysis 2); aber man muss diese Frage doch oft im Einzelfall mit Hilfe der jeweiligen Eigenschaften f und u_0 untersuchen. Deswegen entwickeln wir eine Theorie, die ein endliches Existenzintervall J_0 zulässt.

In Hinblick auf unsere Interpretation wollen wir für jedes $u_0 \in D_0$ eine eindeutige Lösung u von (4.1) und (4.2) finden, die stetig von u_0 (und f) abhängt. Dann nennt man das Anfangswertproblem (*lokal*) *wohlgestellt*. Andere wichtige Themen sind etwa (siehe auch Abschnitt 5.1 in Analysis 2):

- 1) die (globale) Existenz von u auf J ,
- 2) die Invarianz von Mengen (z.B.: folgt $u(t) \geq 0$ aus $u_0 \geq 0$?),
- 3) die Existenz zeitlich konstanter (oder periodischer) Lösungen u_* ,
- 4) das Verhalten von u für $t \rightarrow \infty$, z.B. wenn u_0 nahe bei u_* ist.

Allgemeiner als das Problem (4.1) und (4.2) erster Ordnung kann man Anfangswertprobleme n -ter Ordnung betrachten. Seien dazu $n \in \mathbb{N}$, $D_j \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und nichtleer, sowie $u^j \in D_j$ für $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ und $g : J \times D_0 \times \dots \times D_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig. Wir suchen nun wie oben eine Funktion $u \in C^n(J_0, \mathbb{R}^m)$ mit $u^{(j)}(t) \in D_j$ für alle $j \in \{0, \dots, n-1\}$ und $t \in J_0$, die das System

$$\begin{aligned} u^{(n)}(t) &= g(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)), & t \in J_0, \\ u(t_0) &= u^0, \quad u'(t_0) = u^1, \dots, u^{(n-1)}(t_0) = u^{n-1}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

erfüllt. Wir nennen dann u eine *Lösung von (4.5) auf J_0* . Man kann (4.5) auf (4.1) und (4.2) zurückführen, indem man $D := D_0 \times \dots \times D_{n-1} \subseteq \mathbb{R}^{mn}$, $v^0 :=$

$(u^0, \dots, u^{n-1}) \in D$ und

$$F : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^{mn}; \quad F(t, x_0, \dots, x_{n-1}) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ g(t, x_0, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

setzt. Das folgende Resultat zeigt die Äquivalenz von (4.5) und (4.1) für F . Es wurde für $n = 2$ in Bemerkung 5.3 aus Analysis 2 bewiesen, und die Argumente übertragen sich leicht auf den allgemeinen Fall. Bei detaillierteren Untersuchungen von (4.5) kann es aber von Vorteil sein, diese Umformulierung nicht zu verwenden.

LEMMA 4.1. *Unter den obigen Annahmen gelten die folgenden Implikationen.*

a) *Sei u eine Lösung des Systems (4.5) auf J_0 . Dann löst die Funktion $v := (u, u', \dots, u^{(n-1)})$ das Problem (4.1) und (4.2) für F und v^0 auf J_0 .*

b) *Sei $v = (v_1, \dots, v_n)$ eine Lösung des Problems (4.1) und (4.2) für F und v^0 auf J_0 . Dann löst die Funktion $u := v_1$ das System (4.5) auf J_0 und es gilt $v = (u, u', \dots, u^{(n-1)})$.*

Unsere Lösungstheorie für (4.1) beruht auf dem folgenden Begriff.

DEFINITION 4.2. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$. Eine Funktion $g : J \times M \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt lokal Lipschitz in x , wenn*

$$\begin{aligned} &\forall (t_0, x_0) \in J \times M \quad \exists \delta = \delta(t_0, x_0) > 0, \quad r = r(t_0, x_0) > 0, \quad L = L(\delta, r) \geq 0 \text{ mit} \\ &\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap J, \quad x, y \in \overline{B}(x_0, r) \cap M : \quad |g(t, x) - g(t, y)| \leq L |x - y|_2. \end{aligned}$$

Wenn hierbei $g : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ nicht von t abhängt, dann heißt g lokal Lipschitz. Die Funktion g ist Lipschitz in x , wenn es so eine Konstante $L \geq 0$ gibt, dass

$$|g(t, x) - g(t, y)| \leq L |x - y|_2$$

für alle $t \in J$ und $x, y \in M$ gilt.

Wir wiederholen wichtige Eigenschaften aus Bemerkung 5.5 in Analysis 2. Wegen Teil a) ist die lokale Lipschitzeigenschaft meist leicht nachzuweisen. Man beachte, dass Polynome auf $\mathbb{R}^m$ vom Grad größer gleich 2 lokal Lipschitz, aber nicht Lipschitz sind. Ferner ist $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$; $f(x) = |x|_2$, Lipschitz aber nicht C^1 .

LEMMA 4.3. a) *Die Funktion $g \in C(J \times D, \mathbb{R}^m)$ besitze partielle Ableitungen $\partial_{x_j} g \in C(J \times D, \mathbb{R}^m)$ für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$. Dann ist g lokal Lipschitz in x . Eine Funktion $g \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ ist lokal Lipschitz.*

b) *Sei $g : J \times M \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und lokal Lipschitz in x für ein $M \subseteq \mathbb{R}^m$. Dann ist g Lipschitz in x auf jeder Menge $[a, b] \times K \subseteq J \times M$ mit kompaktem $K \subseteq \mathbb{R}^m$.*

Um die Gleichung (4.1) zu lösen, wollen wir den Regularitätsverlust durch die Ableitung vermeiden und verwenden deshalb eine äquivalente Formulierung

als Integralgleichung. Dafür benötigt man den nächsten Hilfssatz, der auf dem Hauptsatz beruht, siehe Lemma 5.6 in Analysis 2.

LEMMA 4.4. Seien $f \in C(J \times D, \mathbb{R}^m)$, $u_0 \in D$ und $u \in C(J_0, \mathbb{R}^m)$. Genau dann löst u (4.1) und (4.2) auf J_0 , wenn $u(t) \in D$ und

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds \quad (4.6)$$

für alle $t \in J_0$ gelten.

Wenn man u in (4.6) abschätzen will, ist das folgende *Gronwallsche Lemma* oft von großem Nutzen.

LEMMA 4.5. Seien $\alpha, \beta, \varphi \in C([a, b], \mathbb{R})$ mit $\beta(t) \geq 0$ und

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s) \varphi(s) \, ds$$

für $t \in [a, b]$. Dann gilt die Ungleichung

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s) \beta(s) \exp \left(\int_s^t \beta(\tau) \, d\tau \right) \, ds$$

für $t \in [a, b]$. Wenn speziell $\alpha = M$ konstant ist, erhalten wir

$$\varphi(t) \leq M e^{\int_a^t \beta(s) \, ds}, \quad t \in [a, b].$$

BEWEIS. Sei¹ $t \in [a, b]$. Wir setzen

$$\psi(t) = \int_a^t \beta(s) \varphi(s) \, ds.$$

Diese Funktion erfüllt die Gleichungen $\psi(a) = 0$ und $\psi' = \beta\varphi$. Weiter wird die Voraussetzung zur Ungleichung $\varphi \leq \alpha + \psi$. Wir folgern daraus und aus $\beta \geq 0$ die Abschätzungen $\psi' \leq \beta(\alpha + \psi)$ auf $[a, b]$ und

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\exp \left[-\int_a^s \beta(\tau) \, d\tau \right] \psi(s) \right) &= \exp \left[-\int_a^s \beta(\tau) \, d\tau \right] \psi'(s) - \exp \left[-\int_a^s \beta(\tau) \, d\tau \right] \beta(s) \psi(s) \\ &\leq \alpha(s) \beta(s) \exp \left[-\int_a^s \beta(\tau) \, d\tau \right] \end{aligned}$$

für $s \in [a, b]$. Integration von a nach t liefert dann

$$\begin{aligned} \exp \left[-\int_a^t \beta(\tau) \, d\tau \right] \psi(t) - 0 &\leq \int_a^t \alpha(s) \beta(s) \exp \left[-\int_a^s \beta(\tau) \, d\tau \right] \, ds, \\ \psi(t) &\leq \int_a^t \alpha(s) \beta(s) \exp \left[\int_s^t \beta(\tau) \, d\tau \right] \, ds. \end{aligned}$$

Mit $\varphi \leq \alpha + \psi$ erhalten wir die erste Behauptung.

Sei nun $\alpha = M$. Das bisher Gezeigte und der Hauptsatz führen auf

$$\varphi(t) \leq M + M \int_a^t \beta(s) \exp \left[\int_s^t \beta(\tau) \, d\tau \right] \, ds = M + M \exp \left[\int_a^t \beta(\tau) \, d\tau \right] - M. \quad \square$$

¹Der Beweis wurde in Vorlesung ausgelassen.

Wir besprechen kurz zwei oft verwendete, einfache Operationen mit Lösungen.

LEMMA 4.6. *Seien $f \in C(J \times D, \mathbb{R}^m)$ und $u_0 \in D$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) *Seien $t_1 \in \mathbb{R}$ und u eine Lösung von (4.1) und (4.2) auf J_0 . Setze $v(t) = u(t - t_1)$ für $t \in t_1 + J_0$. Die verschobene Funktion $v \in C^1(t_1 + J_0, \mathbb{R}^m)$ erfüllt*

$$v'(t) = f(t - t_1, v(t)), \quad t \in t_1 + J_0, \quad v(t_1 + t_0) = u_0.$$

b) *Seien u_1 und u_2 Lösungen von (4.1) auf $[t_0, t_1] \subseteq J$ bzw. $[t_1, t_2] \subseteq J$ mit Anfangswerten $u_1(t_0) = u_0$ bzw. $u_2(t_1) = u_1(t_1)$. Die zusammengesetzte Funktion*

$$w(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \in [t_0, t_1], \\ u_2(t), & t \in (t_1, t_2], \end{cases}$$

löst das System (4.1) und (4.2) auf $[t_0, t_2]$.

BEWEIS. Die Aussagen folgen mittels Einsetzen. In b) ist dabei w in t_1 stetig differenzierbar, weil wegen (4.1) die links- und rechtsseitige Ableitungen gleich $f(t_1, u_1(t_1))$ bzw. $f(t_1, u_2(t_1))$ sind und somit übereinstimmen. $\square$

4.2. Wohlgestelltheit von Anfangswertproblemen und globale Existenz

Wir beweisen unten das zentrale Theorem von *Picard–Lindelöf*, das die Grundlage der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist. Unter der leicht zu überprüfenden lokalen Lipschitzbedingung, zeigt es Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für jeden Anfangswert in D , charakterisiert eine mögliche blow-up Zeit und liefert die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Daten. Die letztere Eigenschaft ist etwas umständlich zu formulieren, da die Lösungen nicht für alle Zeiten existieren müssen. Wir behandeln auch Zeiten kleiner als t_0 , was z.B. im nächsten Abschnitt gebraucht wird. Dieses Theorem beschreibt insgesamt die *lokale Wohlgestelltheit* des Problems (4.1).

Als ersten, aber entscheidenden Schritt gewinnen wir eine Lösung auf einem eventuell kleinem Zeitintervall mittels eines typischen Fixpunktarguments, das auf der Integralgleichung (4.6) beruht. Im Beweis verwenden wir aus Analysis 2, dass $C([a, b], \mathbb{R}^m)$ versehen mit der Supremumsnorm $\|v\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |v(t)|_2$ ein Banachraum ist. Für $t_0, t \in J$ und $b > 0$ schreiben wir

$$J(b) = J(t_0, b) := \begin{cases} [t_0 - b, t_0 + b], & t_0 \in J^\circ, \\ [t_0, t_0 + b], & t_0 = \min J, \\ [t_0 - b, t_0], & t_0 = \max J. \end{cases} \quad \langle t_0, t \rangle := \begin{cases} [t_0, t], & t \geq t_0, \\ [t, t_0], & t < t_0, \end{cases}$$

LEMMA 4.7. *Seien $f \in C(J \times D, \mathbb{R}^m)$ lokal Lipschitz in x , $t_0 \in J$ und $u_0 \in D$. Dann gibt es eine Zeit $b_0 = b_0(u_0) > 0$ mit $J(b_0) \subseteq J$, siehe (4.9), und eine Lösung $u \in C^1(J(b_0), \mathbb{R}^m)$ von (4.1) und (4.2) auf $J(b_0)$.*

BEWEIS. 1) Da D offen und J° nichtleer sind, gibt es einen Radius $r > 0$ mit $B_0 := \overline{B}(u_0, r) \subseteq D$ und eine Zeit $\beta > 0$ mit $J(\beta) \subseteq J$. Nach Lemma 4.3 ist f Lipschitz in x auf $J(\beta) \times B_0$ mit einer Konstanten $L_0 > 0$. Sei $b \in (0, \beta]$. Wir setzen

$$E(b) = E(b, r, t_0) := \{v \in C(J(b), \mathbb{R}^m) \mid \forall t \in J(b) : v(t) \in B_0\}.$$

(Wir brauchen die Kugel B_0 , um die Lipschitzkonstante zu erhalten und um $v(t) \in D$ zu sichern.) Nach Satz 2.27 in Analysis 2 ist $E(b)$ mit der Metrik $d(v, w) = \|v - w\|_\infty$ vollständig, wenn $E(b)$ in $C(J(b), \mathbb{R}^m)$ abgeschlossen ist. Dazu konvergiere die Folge (v_n) aus $E(b)$ gegen eine Funktion v in $C(J(b), \mathbb{R}^m)$. Also strebt $v_n(t) \in B_0$ gegen $v(t)$ für $n \rightarrow \infty$ und jedes $t \in J(b)$. Da B_0 abgeschlossen ist, folgt $v(t) \in B_0$ und damit die gewünschte Abgeschlossenheit von $E(b)$.

Im Hinblick auf (4.6) definieren wir für $v \in E(b)$ die stetige Funktion

$$\Phi(v) : J(b) \rightarrow \mathbb{R}^m; \quad (\Phi(v))(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) \, ds.$$

Seien nun $v, w \in E(b)$. Wir finden unten so eine Zeit $b_0 \in (0, \beta]$, dass für alle $b \in (0, b_0]$ die Funktion $\Phi(v)$ in $E(v)$ liegt und die strikte Kontraktivität $\|\Phi(v) - \Phi(w)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|v - w\|_\infty$ gilt. Der Banachsche Fixpunktsatz (Theorem 2.40 in Analysis 2) für $\Phi : E(b_0) \rightarrow E(b_0)$ liefert dann einen eindeutigen Fixpunkt $u = \Phi(u)$ in $E(b_0)$. Laut Lemma 4.4 löst u das Problem (4.1) und (4.2) auf $J(b_0)$.

2) Wir setzen noch $C_0 = \max_{s \in J(\beta)} |f(s, u_0)|_2 \geq 0$. (Auch diese Konstante ist unabhängig von b .) Sei $t \in J(b)$. Die Lipschitzeigenschaft und $v \in E(b)$ implizieren

$$\begin{aligned} |(\Phi(v))(t) - u_0|_2 &\leq \int_{\langle t_0, t \rangle} |f(s, v(s)) - f(s, u_0) + f(s, u_0)|_2 \, ds \\ &\leq \int_{\langle t_0, t \rangle} (L_0 |v(s) - u_0|_2 + C_0) \, ds \leq b(L_0 r + C_0) \leq r, \end{aligned} \quad (4.7)$$

wenn wir $b \in (0, b'_0]$ mit $b'_0 := \min\{\beta, r(L_0 r + C_0)^{-1}\}$ wählen. Analog erhalten wir

$$\begin{aligned} |(\Phi(v))(t) - (\Phi(w))(t)|_2 &\leq \int_{\langle t_0, t \rangle} |f(s, v(s)) - f(s, w(s))|_2 \, ds \\ &\leq \int_{\langle t_0, t \rangle} L_0 |v(s) - w(s)|_2 \, ds \leq bL_0 \|v - w\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|v - w\|_\infty \end{aligned} \quad (4.8)$$

für Zeiten $b \in (0, b_0]$ mit

$$b_0 = b_0(u_0) := \min\{b'_0, (2L_0)^{-1}\}. \quad (4.9)$$

Also gibt es einen eindeutigen Fixpunkt $u = \Phi(u)$ in $E(b_0)$. $\square$

Die Zeit b_0 in (4.9) hängt neben $|u_0|_2$ auch von der Position von u_0 ab. Wenn $D = \mathbb{R}^m$ ist, kann man dies verbessern. Sei hierfür $u_0 \in \mathbb{R}^m$ und $r_0 \geq |u_0|_2$. In $E(b)$ wählen wir dann $r_1 = r_0 + 1$ und $B_0 = \overline{B}(0, r_1)$, definieren L_0 wie oben und setzen nun $C_0^* = \max_{s \in J(\beta)} |f(s, 0)|_2$. Statt (4.7) verwendet man

$$|(\Phi(v))(t)|_2 \leq |u_0|_2 + \int_{\langle t_0, t \rangle} |f(s, v(s)) - f(s, 0) + f(s, 0)|_2 \, ds$$

$$\leq r_0 + b(L_0 r_1 + C_0^*) \leq r_1$$

für $b \leq b_0^* := \min\{\beta, (L_0 r_1 + C_0^*)^{-1}\}$. Für $b \leq \tilde{b}_0 = \tilde{b}_0(r_0) := \min\{b_0^*, (2L_0)^{-1}\}$ gilt dann (4.8) unverändert, und die Aussage folgt mit $\tilde{b}_0$ statt b_0 .

Der Beweis von Lemma 4.7 zeigt die ‘bedingte’ Eindeutigkeit von Lösungen in $E(b_0)$. Tatsächlich zeigt der nächste Hilfssatz eine viele stärkere und flexiblere Eindeutigkeitsaussage: Zwei Lösungen u_1 und u_2 von (4.1) und (4.2) stimmen auf dem Schnitt ihres Existenzintervall überein. (Zum Beispiel liefert Lemma 4.7 ja auch Lösungen $u_b \in E(b)$ für $b \in (0, b_0)$, die somit die Einschränkung von u auf $J(b)$ sind.) Im indirekten Beweis von Lemma 4.8 findet man Zeiten $t_n > \tau \geq t_0$ mit $u_1(\tau) = u_2(\tau)$, $u_1(t_n) \neq u_2(t_n)$ und $t_n \rightarrow \tau$. Dies kann man wie in (4.8) zu einem Widerspruch führen. (In der Vorlesung wurde stattdessen die Eindeutigkeit in $E(b, r, \tau)$ für passende b und r verwendet.)

LEMMA 4.8. Seien $f \in C(J \times D, \mathbb{R}^m)$ lokal Lipschitz in x , $t_0 \in J$ und $u_0 \in D$. Seien u_1 und u_2 Lösungen von (4.1) und (4.2) auf Intervallen J_1 bzw. J_2 mit $t_0 \in J_j \subseteq J$ für $j \in \{1, 2\}$. Dann stimmen u_1 und u_2 auf $J_1 \cap J_2$ überein.

BEWEIS. Im Falle $J_1 \cap J_2 = \{t_0\}$ ist die Behauptung klar. Andernfalls seien etwa $\sup J_1$ und $\sup J_2$ größer als t_0 . Setze $\sigma = \sup(J_1 \cap J_2)$ und

$$\tau = \sup\{t_1 \in [t_0, \sigma) \mid \forall t \in [t_0, t_1] : u_1(t) = u_2(t)\}.$$

Wegen $u_1(t_0) = u_0 = u_2(t_0)$, ist die obige Menge nichtleer und damit existiert $\tau \in [t_0, \sigma]$. Wir nehmen an, es gälte $\tau < \sigma$. Dann liegt τ in $J_1 \cap J_2$, sodass $v_0 := u_1(\tau)$ und $u_2(\tau)$ auf Grund von Stetigkeit gleich sind. Weiter gibt es Zeiten $t_n \in (\tau, \sigma) \subseteq J_1 \cap J_2$ mit $u_1(t_n) \neq u_2(t_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t_n \rightarrow \tau$ für $n \rightarrow \infty$.

Wähle $r > 0$ mit $B := \overline{B}(v_0, r) \subseteq D$ und $\tau_1 \in (\tau, \sigma)$ mit $u_1(t), u_2(t) \in B$ für alle $t \in [\tau, \tau_1]$. (Dies ist möglich, weil $u_j(\tau) = v_0$ und u_j für $j \in \{1, 2\}$ stetig sind.) Gemäß Lemma 4.3 ist f auf $[\tau, \tau_1] \times B$ Lipschitz in x mit Konstante $L \geq 0$. Sei $t \in [\tau, \tau_1]$. Nach (4.6) gilt

$$|u_1(t) - u_2(t)|_2 = \left| \int_{\tau}^t (f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))) \, ds \right|_2 \leq \int_{\tau}^t L |u_1(s) - u_2(s)|_2 \, ds.$$

Die Gronwallsche Ungleichung impliziert $|u_1(t) - u_2(t)|_2 \leq 0e^{L(t-\tau)} = 0$ für $t \in [\tau, \tau_1]$, im Widerspruch zu $u_1(t_n) \neq u_2(t_n)$ für $t_n \rightarrow \tau$. Also ist $\tau = \sigma$ und somit $u_1 = u_2$ auf $[t_0, \sigma)$. Zeiten $t \leq t_0$ behandelt man analog (mit dem Gronwallschen Lemma 6.1 aus [1]). $\square$

Seien $f \in C(J \times D, \mathbb{R}^m)$ lokal Lipschitz in x , $t_0 \in J$ und $u_0 \in D$. Ausgehend von den obigen Lemmata können wir eine eindeutige Lösung von (4.1) und (4.2) auf einem möglichst großen J_0 einführen. Dazu definieren wir die *maximale Existenzzeit*

$\bar{t}(u_0) = \bar{t}^f(u_0) := \sup\{\tau \in [t_0, \sup J) \mid \exists \text{ Lösung } u_\tau \text{ von (4.1) und (4.2) auf } [t_0, \tau]\}$ falls $\sup J > t_0$ ist, sowie $\bar{t}(u_0) := t_0$ für $t_0 = \max J$, und die *minimale Existenzzeit*

$$\underline{t}(u_0) = \underline{t}^f(u_0) := \inf\{\tau \in (\inf J, t_0] \mid \exists \text{ Lösung } u_\tau \text{ von (4.1) und (4.2) auf } [\tau, t_0]\}$$

falls $\inf J < t_0$ ist, sowie $\underline{t}(u_0) := t_0$ für $t_0 = \min J$. Weiter ist

$$J_{\max}(u_0) = J_{\max}^f(u_0) := \begin{cases} (\underline{t}(u_0), \bar{t}(u_0)), & t_0 \in J^\circ, \\ [t_0, \bar{t}(u_0)), & t_0 = \min J, \\ (\bar{t}(u_0), t_0], & t_0 = \max J, \end{cases} \quad (4.10)$$

das *maximale Existenzintervall*.

Lemma 4.7 sichert $\bar{t}(u_0) > t_0$ und $\underline{t}(u_0) < t_0$ (für $\sup J > t_0$ bzw. $\inf J < t_0$). Genauer gesagt, kann man die Lösung u aus Lemma 4.7 z.B. von $[t_0, t_0 + b_0(u_0)]$ auf ein größeres Existenzintervall ausdehnen, indem man eine Lösung v mit Startwert $v(t_0 + b_0(u_0)) = u(t_0 + b_0(u_0))$ mittels Lemma 4.6 anfügt. Also liegt $\bar{t}(u_0)$ in $(t_0 + b_0(u_0), \sup J]$ (falls $\sup J > t_0$), sowie $\underline{t}(u_0)$ in $[\inf J, t_0 - b_0(u_0))$ (falls $\inf J < t_0$).

Sei etwa $t_0 < \sigma < \tau < \sup J$. Nach Lemma 4.8 stimmen die Lösungen u_σ und u_τ auf $[t_0, \sigma]$ überein. Damit können wir durch $u_+(t) = u_\tau(t)$ für $t \in [t_0, \tau]$ eine eindeutige Lösung u_+ von (4.1) und (4.2) auf $[t_0, \bar{t}(u_0))$ definieren. Analog erhält man eine eindeutige Lösung u_- auf $(\underline{t}(u_0), t_0]$, und mit Lemma 4.6 kann man $u_\pm$ zu einer eindeutigen Lösung u auf $J_{\max}(u_0)$ zusammensetzen (wenn t_0 in J° liegt).

Damit haben wir den ersten Teil des Theorems von *Picard–Lindelöf* gezeigt, dessen zweiter Teil die obige Bezeichnung ‘maximal’ rechtfertigt.

THEOREM 4.9. *Seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $t_0 \in J$, $u_0 \in D$ und $f \in C(J \times D, \mathbb{R}^m)$ lokal Lipschitz in x . Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) *Es gibt genau eine maximale Lösung $u =: u(\cdot; u_0, t_0, f)$ von (4.1) und (4.2) auf $J_{\max}(u_0)$. Dabei gelten $\bar{t}(u_0) \in (t_0 + b_0(u_0), \sup J]$ im Falle $\sup J > t_0$ und $\underline{t}(u_0) \in [\inf J, t_0 - b_0(u_0))$ für $\inf J < t_0$, wobei $b_0(u_0)$ durch (4.9) gegeben ist.*

b) *Sei $t_0 < \bar{t}(u_0) < \sup J$. Dann gibt es Zeiten $t_n \in [t_0, \bar{t}(u_0))$ mit $t_n \rightarrow \bar{t}(u_0)$ und*

$$|u(t_n)|_2 \rightarrow +\infty \quad \text{oder} \quad \text{dist}(u(t_n), \partial D) = \inf_{x \in \partial D} |u(t_n) - x|_2 \rightarrow 0 \quad (4.11)$$

für $n \rightarrow \infty$ (blow-up Bedingung). Seien speziell $D = \mathbb{R}^m$ und $\sup J = +\infty$. Dann liegt $\bar{t}(u_0)$ in $(t_0, +\infty]$ und aus $\bar{t}(u_0) < +\infty$ folgt

$$\exists t_n \rightarrow \bar{t}(u_0) \quad \text{mit} \quad |u(t_n)|_2 \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Analoge Aussagen gelten für $\underline{t}(u_0)$.

d) *Sei $t_0 \in [a, b] \subseteq J_{\max}^f(u_0)$ mit $b > a$. Dann gibt es Konstanten $\delta = \delta(a, b, u_0, f) > 0$ und $c = c(a, b, u_0, f) \geq 0$, sowie ein Kompaktum $K = K(a, b, u_0, f) \subseteq D$ derart, dass $\bar{B}(u_0, \delta)$ in D liegt und für alle Anfangswerte $v_0, w_0 \in \bar{B}(u_0, \delta)$ und Funktionen $g \in C(J \times D, \mathbb{R}^m)$, die lokal Lipschitz in x sind und $\max_{x \in K, t \in [a, b]} |f(t, x) - g(t, x)| \leq \delta$ erfüllen, die folgenden Aussagen gelten.*

i) $[a, b] \subseteq J_{\max}^g(v_0)$.

ii) *Die Lösungen $v = v(\cdot; v_0, t_0, f)$ und $w = w(\cdot; w_0, t_0, g)$ erfüllen*

$$|v(t) - w(s)|_2 \leq c \left(|t - s| + |v_0 - w_0|_2 + \max_{x \in K, \tau \in [a, b]} |f(\tau, x) - g(\tau, x)| \right), \quad t, s \in [a, b].$$

Die Menge K ist dabei gleich $\bigcup_{t \in [a, b]} \overline{B}(u(t), r)$ für einen Radius $r > 0$ und enthält die Vektoren $v(t)$ und $w(t)$ für jedes $t \in [a, b]$.

BEWEIS. Aussage a) haben wir oben gezeigt. Für Teil b) sei etwa $T := \bar{t}(u_0) < \sup J$. Wir nehmen an, die Bedingung (4.11) gälte nicht. Dann ist u auf $J_+ := [t_0, T)$ beschränkt und auch der Abschluss von $\Gamma_+ := u(J_+)$ liegt in D . Demnach sind $\overline{J_+}$ und $\overline{\Gamma_+}$ kompakt. Gleichung (4.1) und der Satz vom Maximum implizieren

$$|u'(t)|_2 = |f(t, u(t))|_2 \leq \sup_{s \in \overline{J_+}, x \in \overline{\Gamma_+}} |f(s, x)|_2 < +\infty$$

für alle $t \in J_+$. Gemäß Satz 3.23 aus Analysis 2 ist u somit Lipschitz, sodass $u(t)$ für $t \rightarrow T$ gegen $u_1 \in \overline{\Gamma_+} \subseteq D$ konvergiert und damit auch $u'(t) = f(t, u(t)) \rightarrow f(T, u_1)$. (Siehe Theorem 2.55 in Analysis 2.) Lemma 4.7 liefert eine Lösung v von (4.1) mit $v(T) = u_1$ auf einem Intervall $[T, T']$ mit $T' > T$. Wie in Lemma 4.6 erhalten wir somit eine Lösung w von (4.1) und (4.2) auf $[t_0, T']$ im Widerspruch zur Definition von $T = \bar{t}(u_0)$.

c) 1) Wir beginnen mit Vorbereitungen. Das Bild $\Gamma := u([a, b]) \subseteq D$ ist kompakt wegen Theorem 2.49 in Analysis 2. Somit ist $r := \frac{1}{2} \text{dist}(\Gamma, \partial D) > 0$ und die Menge $K := \bigcup_{t \in [a, b]} \overline{B}(u(t), r)$ liegt in D . Wir zeigen die Kompaktheit von K . Für jedes $x \in K$ gibt es eine Zeit $t \in [a, b]$ mit $x \in \overline{B}(u(t), r)$ und folglich

$$|x|_2 \leq |x - u(t)|_2 + |u(t)|_2 \leq r + \max_{t \in [a, b]} |u(t)|_2 < +\infty.$$

Also ist K beschränkt. Ferner konvergiere (x_n) aus K gegen einen Vektor x in $\mathbb{R}^m$. Dann gibt es $t_n \in [a, b]$ mit $|x_n - u(t_n)|_2 \leq r$. Da $[a, b]$ kompakt ist, strebt eine Teilfolge $(t_{n_j})_j$ gegen eine Zeit $t \in [a, b]$ und deswegen $|x_{n_j} - u(t_{n_j})|_2 \leq r$ gegen $|x - u(t)|_2 \leq r$. Somit liegt x in K und K ist abgeschlossen. Der Satz von Bolzano–Weierstraß impliziert die behauptete Kompaktheit von K .

Laut Lemma 4.3 ist nun f Lipschitz in x mit Konstanten $L > 0$ auf $[a, b] \times K$. Setze $\alpha = \max\{b - t_0, t_0 - a\} > 0$ und $\delta = \frac{1}{2}r(1 + \alpha)^{-1}e^{-\alpha L} < \frac{r}{2}$. Von nun an nehmen wir $a = t_0$ an; also ist $\alpha = b - t_0$. Den allgemeinen Fall behandelt man analog.

2) Wir zeigen i). Seien $v_0 \in \overline{B}(u_0, \delta)$ und $|f(t, x) - g(t, x)|_2 \leq \delta$ für $t \in [t_0, b]$ und $x \in K$. Nach Teil a) gibt es eine maximale Lösung $\tilde{v} = u(\cdot; v_0, t_0, g)$ von (4.1) und (4.2) für g und v_0 . Wir behaupten, dass $\bar{t}^g(v_0) > b$ und $|u(t) - \tilde{v}(t)|_2 \leq r$ für alle $t \in [t_0, b]$ gelten.

In der Tat, da u und $\tilde{v}$ stetig sind und $|u_0 - v_0|_2 \leq \delta < r/2$ ist, liegt die Zahl

$$\tau := \sup\{t \in [t_0, \min\{\bar{t}^g(v_0), b\}) \mid \forall s \in [t_0, t] : |u(s) - \tilde{v}(s)|_2 \leq r\}$$

in $(t_0, b]$. Sei $t_0 \leq s \leq t < \tau$. Da $u(s)$ und $\tilde{v}(s)$ in K liegen, folgt aus (4.6) und den obigen Beobachtungen die Abschätzung

$$\begin{aligned} & |u(t) - v(t)|_2 \\ &= \left| u_0 - v_0 + \int_{t_0}^t (f(s, u(s)) - f(s, \tilde{v}(s))) ds + \int_{t_0}^t (f(s, \tilde{v}(s)) - g(s, \tilde{v}(s))) ds \right|_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |u_0 - v_0|_2 + \int_{t_0}^t L|u(s) - \tilde{v}(s)|_2 \, ds + \int_{t_0}^t \delta \, ds \\
&\leq (1 + \alpha)\delta + \int_{t_0}^t L|u(s) - \tilde{v}(s)|_2 \, ds.
\end{aligned}$$

Die Gronwallsche Ungleichung und die Wahl von δ implizieren

$$|u(t) - \tilde{v}(t)|_2 \leq (1 + \alpha)\delta e^{L(t-t_0)} \leq (1 + \alpha)\delta e^{\alpha L} \leq \frac{r}{2}.$$

Aus Behauptung b) schließen wir dann $\bar{t}^g(v_0) > \tau$, sodass die Stetigkeit von $u - v$ zur Ungleichung $|u(\tau) - \tilde{v}(\tau)|_2 \leq \frac{r}{2}$ führt.

Wenn $\tau < b$ wäre, gäbe es Zeiten $t_n \in (\tau, \bar{t}^g(v_0))$ mit $t_n \rightarrow \tau$ für $n \rightarrow \infty$ und $|u(t_n) - \tilde{v}(t_n)|_2 > r$. Wieder Stetigkeit ergibt den Widerspruch $|u(\tau) - \tilde{v}(\tau)|_2 \geq r$. Also ist $\tau = b$ und die Behauptung gilt.

3) Es wird ii) bewiesen. Seien auch $w_0 \in \bar{B}(u_0, \delta)$ und $v = u(\cdot; v_0, t_0, f)$ bzw. $w = u(\cdot; w_0, t_0, g)$ die maximale Lösungen von (4.1) und (4.2) für f und v_0 bzw. g und w_0 . Nach Schritt 2) haben wir $\bar{t}^f(v_0) > b$, $\bar{t}^g(w_0) > b$ und $v(t), w(t) \in K$ für alle $t \in [t_0, b]$. Wie in 2) berechnen wir

$$\begin{aligned}
&|v(t) - w(t)|_2 \\
&= |v_0 - w_0|_2 + \int_{t_0}^t |f(s, v(s)) - f(s, w(s))|_2 \, ds + \int_{t_0}^t |f(s, w(s)) - g(s, w(s))|_2 \, ds \\
&\leq |v_0 - w_0|_2 + \int_{t_0}^t L|v(s) - w(s)|_2 \, ds + \alpha \max_{s \in [t_0, b], x \in K} |f(s, x) - g(s, x)|_2.
\end{aligned}$$

Gronwall liefert wie oben

$$|v(t) - w(t)|_2 \leq \max\{1, \alpha\}e^{\alpha L} \left(|v_0 - w_0|_2 + \max_{s \in [t_0, b], x \in K} |f(s, x) - g(s, x)|_2 \right).$$

Für $t_0 \leq s \leq t \leq b$ erhalten wir ferner

$$\begin{aligned}
|w(t) - w(s)|_2 &\leq \int_s^t |w'(\tau)|_2 \, d\tau = \int_s^t |g(\tau, w(\tau))|_2 \, d\tau \leq (t - s) \max_{\tau \in [t_0, b], x \in K} |g(\tau, x)|_2 \\
&\leq (t - s) \left(\delta + \max_{\tau \in [t_0, b], x \in K} |f(\tau, x)|_2 \right).
\end{aligned}$$

Aus diesen Abschätzungen folgt die Behauptung. $\square$

Es gibt eine Variante des obigen Theorems von *Peano* für lediglich stetige $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dabei fällt die Eindeutigkeitsaussage weg (vgl. (4.3)) und man erhält in Teil c) nur Stetigkeit statt lokaler Lipschitzstetigkeit. Wir verweisen hierfür auf die Sätze 6.1.1, 6.2.1 und 6.3.2 in [5].

Die blow-up Bedingung (4.11) wendet man meist indirekt an, um *globale* (Vorwärts-) Existenz $\bar{t}(u_0) = \sup J$ zu zeigen. Sei dazu $\sup J = +\infty$. Man nimmt an, dass $T := \bar{t}(u_0)$ endlich wäre. Laut Theorem 4.9 hat man eine Lösung u von (4.1) auf dem beschränkten Zeitintervall $[t_0, T)$. Man muss nun zeigen, dass u beide Bedingungen in (4.11) auf $[t_0, T)$ verletzt. Dieser Widerspruch impliziert dann

$\bar{t}(u_0) = +\infty$. Hierbei fällt der zweite Teil von (4.11) im Falle $D = \mathbb{R}^m$ weg und wir werden uns zunächst auf den ersten konzentrieren.

Um die erste Bedingung in (4.11) auszuschließen, muss man die Beschränktheit von u auf $[t_0, T)$ nachweisen. Dazu kann der folgende Satz dienen oder Satz 6.11 unten. Manchmal genügen auch elementare Überlegungen, die die Struktur des Problems, Monotonie oder die Gronwallsche Ungleichung ausnutzen, vergleiche Beispiel 4.13c) und die Übungen. Eine globale Lösung kann im übrigen sehr wohl auf $[t_0, +\infty)$ unbeschränkt sein. Das einfachste Beispiel ist $u(t) = e^t$ mit $u' = u$.

Wenn $D \neq \mathbb{R}^m$ ist, kann man u.U. mittels Invarianzsätzen (etwa Satz 4.12 oder Theorem 5.14) zeigen, dass $u(t)$ sich ∂D nicht nähert. Invarianz etwa von $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ ist oft auch für den Nachweis der Beschränktheit von Nutzen, siehe Beispiel 4.13.

SATZ 4.10. *Seien $f \in C(J \times D, \mathbb{R}^m)$ lokal Lipschitz in x , $M \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen mit $M \subseteq D$, $u_0 \in M$ und $t_0 \in J$. Die maximale Lösung u von (4.1) und (4.2) erfülle $u(t) \in M$ für alle $t \in J_{\max}(u_0)$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) *Sei $\sup J = +\infty$. Für jedes $b > t_0$ gebe es eine Konstante $c(b) \geq 0$ mit*

$$\forall t \in [t_0, b], x \in M : \quad (f(t, x)|x) \leq c(b)(1 + |x|_2^2).$$

Dann ist $\bar{t}(u_0) = +\infty$.

b) *Sei $\inf J = -\infty$. Für jedes $a < t_0$ gebe es eine Konstante $c(a) \geq 0$ mit*

$$\forall t \in [a, t_0], x \in M : \quad (f(t, x)|x) \geq -c(a)(1 + |x|_2^2).$$

Dann ist $\underline{t}(u_0) = -\infty$.

c) *Seien speziell $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $J = \mathbb{R}$. Dann erhält man $\bar{t}(u_0) = +\infty$, wenn es so ein $\tilde{c} \geq 0$ gibt, dass die Ungleichung*

$$\forall x \in M : \quad (f(x)|x) \leq \tilde{c}(1 + |x|_2^2)$$

erfüllt ist. Eine entsprechende Aussage gilt für $\underline{t}(u_0)$.

d) *In den Aussagen a) und b) kann man die Ungleichung für f durch “ $|f(t, x)|_2 \leq \bar{c}(b)(1 + |x|_2)$ ” bzw. “ $|f(t, x)|_2 \leq \bar{c}(a)(1 + |x|_2)$ ” ersetzen (und analog in Teil c)).*

BEWEIS. a) Wir nehmen an, dass $b := \bar{t}(u_0)$ endlich wäre. Sei $t_0 \leq s \leq t < b$. Dann folgt mittels (4.1) und der Voraussetzung die ‘Energie-Abschätzung’

$$\frac{d}{ds}|u(s)|_2^2 = \frac{d}{ds}(u(s)|u(s)) = 2(u'(s)|u(s)) = 2(f(s, u(s))|u(s)) \leq 2c(b)(1 + |u(s)|_2^2).$$

Eine Integration in s und (4.2) liefern

$$|u(t)|_2^2 - |u_0|_2^2 \leq 2c(b)(b - t_0) + 2c(b) \int_{t_0}^t |u(s)|_2^2 ds,$$

und eine Anwendung der Gronwallschen Ungleichung aus Lemma 4.5 führt auf

$$|u(t)|_2^2 \leq e^{2c(b)(t-t_0)} \left(|u_0|_2^2 + 2c(b)(b - t_0) \right) \leq e^{2c(b)(b-t_0)} \left(|u_0|_2^2 + 2c(b)(b - t_0) \right) =: r.$$

Somit liegt $u(t)$ für alle $t \in [t_0, \bar{t}(u_0))$ in der kompakten Menge $M \cap \bar{B}(0, r) \subseteq D$, die einen positiven Abstand zu ∂D hat. Also ist die blow-up Bedingung (4.11) verletzt und somit muss $\bar{t}(u_0) = +\infty$ sein.

b) Wir führen Teil b) auf a) zurück, indem wir $t \in (\underline{t}(u_0), t_0]$ durch die gespiegelte Zeitvariable $\tau = t_0 - t \in [0, t_0 - \underline{t}(u_0)) =: I$ ersetzen und $v(\tau) = u(t_0 - \tau)$ sowie $g(\tau, x) = -f(t_0 - \tau, x)$ für $x \in D$ einführen. Dann liefern (4.1) und (4.2) für u die Gleichungen

$$v'(\tau) = -u'(t_0 - \tau) = -f(t_0 - \tau, u(t_0 - \tau)) = g(\tau, v(\tau)), \quad v(0) = u_0.$$

Die Annahmen an f zeigen, dass g die Voraussetzung von Teil a) auf I erfüllt. Also ist $I = \mathbb{R}_{\geq 0}$ und somit $\underline{t}(u_0) = -\infty$.

Die Aussagen a) und b) implizieren direkt Teil c), sowie d) mittels z.B.

$$(f(t, x)|x) \leq |f(t, x)|_2 |x|_2 \leq \bar{c}(b)(|x|_2 + |x|_2^2) \leq \frac{3}{2}\bar{c}(b)(1 + |x|_2^2)$$

für $t \in [t_0, b]$ und $x \in M$, wobei die Cauchy-Schwarz Ungleichung und $|x|_2 \leq \frac{1}{2}(1 + |x|_2^2)$ verwendet werden. $\square$

Der entscheidende Aspekt des obigen Satzes ist, dass in die Voraussetzungen (neben der Invarianz von M , die für $M = D = \mathbb{R}^m$ natürlich gilt) nur die gegebene Funktion f eingeht und nicht wie in (4.11) die meist nicht explizit bekannte Lösung u . Bei den Bedingungen im Satz beachte man, dass man z.B. $|(f(x)|x)|$ für $x \in B := \bar{B}(0, r)$ stets mit $r \max_B |f|_2$ abschätzen kann. Dies entspricht dem Summanden $\tilde{c}$. Das eigentliche Problem ist das Verhalten für große x . Hier bedeutet etwa die Bedingung in c), dass $f(x)$ in Richtung der äußeren Einheitsnormalen $x/|x|_2$ an $\partial B(0, |x|_2)$ höchstens linear in $|x|_2$ wächst. Man spricht vom *halbseitig linearem Wachstum* von f . Die folgenden einfachen Beispiele illustrieren den Unterschied zum *linearen Wachstum* in Behauptung d). Sie zeigen auch den Unterschied von globaler Existenz in Vorwärts- bzw. Rückwärtszeit.

BEISPIEL 4.11. a) Sei $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz mit Konstante L . Dann gilt

$$|f(x)|_2 \leq |f(x) - f(0)|_2 + |f(0)|_2 \leq c(1 + |x|_2)$$

mit $c := \max\{L, |f(0)|_2\}$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$. Aus Satz 4.10 d) erhalten wir somit $J_{\max}(u_0) = \mathbb{R}$ für jedes $u_0 \in \mathbb{R}^m$.

b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = -x^3$. Hier ist $f(x)x = -x^4 \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Satz 4.10 c) zeigt also $\bar{t}(u_0) = +\infty$ für jedes $u_0 \in \mathbb{R}$. Für $u_0 \geq 0$ liefert ferner die Trennung der Variablen die Lösungsformel $u(t) = \pm(2t + u_0^{-2})^{-1/2}$ und somit das maximale Existenzintervall $J_{\max}(u_0) = (-\frac{1}{2}u_0^{-2}, +\infty)$.

c) Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$, gilt $J_{\max}(u_0) = (-\infty, \frac{1}{u_0})$ für $u_0 > 0$, siehe (4.4). In diesem Fall erhalten wir auch $f(x)x = x^3$, was man für $x \rightarrow +\infty$ nicht durch einen Term $c(1 + x^2)$ dominieren kann.

d) Seien γ die Schwerebeschleunigung, $m > 0$ die Masse eines Massenpunktes am Ende eines Pendels der Länge $\ell > 0$, $-\frac{1}{\ell}R \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $-R(y)y \leq 0$ für alle

$y \in \mathbb{R}$ die Reibungskraft und $mh \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine äußere Kraft. (Ein Beispiel ist $R(y) = c_0 y^{2k+1}$ für Konstanten $c_0 \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$.) Der Auslenkungswinkel $u(t)$ zur Zeit $t \geq 0$ des Pendels wird dann durch die *Pendelgleichung*

$$\begin{aligned} u''(t) &= -\frac{\gamma}{\ell} \sin u(t) - \frac{1}{\ell m} R(u'(t)) + h(t) =: g(t, u(t), u'(t)), \quad t \geq 0, \\ u(0) &= u_0, \quad u'(0) = v_0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

beschrieben, vergleiche Beispiel 5.2 in Analysis 2. Hier gilt $\bar{t}(u_0, v_0) = +\infty$ für alle $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$.

BEWEIS. Wir setzen $f(x, y) = (y, g(t, x, y))$ für $t \in \mathbb{R}$ und $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, vergleiche Lemma 4.1. Seien $b > 0$ und $|t| \leq b$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} (f(t, x, y)|(x, y)) &= xy - \frac{\gamma}{\ell} \sin(x)y - \frac{1}{\ell m} R(y)y + h(t)y \\ &\leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{\gamma}{\ell} |y| + \max_{|t| \leq b} |h(t)| |y| \\ &\leq \frac{1}{2}(1 + \frac{\gamma}{\ell} + \kappa(b))(1 + |(x, y)|_2^2) \end{aligned}$$

mit $\kappa(b) := \max_{|t| \leq b} |h(t)|$. Satz 4.10 a) liefert nun die Behauptung. $\square$

Sei $x \in \mathbb{R}^m$. Wir schreiben $x \geq 0$ wenn $x_1 \geq 0, \dots, x_m \geq 0$ sind, sowie $x > 0$ im Falle $x_1 > 0, \dots, x_m > 0$. Weiter setzen wir $\mathbb{R}_{\geq 0}^m = [0, +\infty)^m$ und $\mathbb{R}_+^m = (0, +\infty)^m$.

Im folgenden Resultat finden wir eine sehr einfache Bedingung an die gegebene Funktion f , die die Nichtnegativität der Lösung für u_0 aus $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ sicherstellt. Sie bedeutet, dass $f(x)$ bei $x \in \partial \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ nicht aus $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ hinausweist.

SATZ 4.12. Seien $f \in C(J \times D, \mathbb{R}^m)$ lokal Lipschitz in x , $\mathbb{R}_{\geq 0}^m \subseteq D$, $u_0 \geq 0$, $t_0 \in J$, $t_0 \neq \max J$, und u die maximale Lösung von (4.1) und (4.2). Es gelte

$$\forall t \in J, x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m \text{ mit } x_k = 0 \text{ für ein } k \in \{1, \dots, m\} \text{ gilt } f_k(t, x) \geq 0. \quad (4.13)$$

(Positivitätsbedingung) Dann folgt $u(t) \geq 0$ für alle $t \in [t_0, \bar{t}(u_0))$.

BEWEIS. Seien $b \in (t_0, \bar{t}(u_0))$ und $\delta > 0$ aus Theorem 4.9 c) zu f , u_0 und b . Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|(1/n_0, \dots, 1/n_0)|_2 \leq \delta$. Für $n \geq n_0$, $t \in J$ und $x \in D$ setzen wir

$$u_0^n = u_0 + \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right), \quad f^n(t, x) = f(t, x) + \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right).$$

Laut Theorem 4.9 c) gibt es eine Lösung u^n zu (4.1) und (4.2) mit f^n und u_0^n auf $[t_0, b]$. Wie in Satz 5.14 in Analysis 2 zeigt man $u^n(t) \geq 0$ für alle $t \in [t_0, b]$. Ferner konvergiert $u^n(t)$ gegen $u(t)$ für $n \rightarrow \infty$ nach Theorem 4.9 c). Da $b \in (t_0, \bar{t}(u_0))$ beliebig ist, folgt $u(t) \geq 0$ für alle $t \in [t_0, \bar{t}(u_0))$. $\square$

Die Bedingung (4.13) ist im Pendelbeispiel 4.11 d) nicht erfüllt. Dort verliert die Lösung im allgemeinen aber auch eine anfängliche Positivität. Nichtnegativität ist in Reaktions- oder Populationsgleichungen von zentraler Bedeutung, da dort $u(t)$ die Quantität der m Spezies beschreibt. Ferner hilft die Invarianz von $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ u.U. auch beim Nachweis der globalen Existenz, wie die folgenden Beispiele zeigen. Dort

ist in allen Fällen klar, dass die Funktionen f glatt und damit lokal Lipschitz sind, sodass wir laut Theorem 4.9 jeweils genau eine maximale Lösung besitzen.

BEISPIEL 4.13. a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = -x^2$. Die Funktion u löse (4.1) und (4.2) zu $u_0 \geq 0$. Dann haben wir $\bar{t}(u_0) = +\infty$ und $u(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$. Für $u_0 < 0$ ist $\bar{t}(u_0) = -1/u_0$.

BEWEIS. Für $x = 0$ gilt $f(x) = 0$, sodass laut Satz 4.12 die Lösung $u(t)$ für alle $t \in [0, \bar{t}(u_0))$ nichtnegativ ist. Wir können also in Satz 4.10 die Menge $M = \mathbb{R}_{\geq 0}$ verwenden. Für $x \geq 0$ erhalten wir $f(x)x = -x^3 \leq 0$. Somit zeigt dieser Satz die globale Existenz $\bar{t}(u_0) = +\infty$. Wenn $u_0 < 0$ ist, verwenden wir Trennung der Variablen, um die Lösung $u(t) = (t + u_0^{-1})^{-1}$ mit $\bar{t}(u_0) = -1/u_0$ zu berechnen. $\square$

b) Im *Konkurrenzmodell* beschreiben $u(t)$ und $v(t)$ die Größe zweier Spezies mit beschränktem Wachstum und einer gemeinsamen Nahrungsquelle. (Vergleiche Beispiel 5.1 in Analysis 2.) Für Konstanten $a, b, c, d, r, s \geq 0$ gilt dabei

$$\begin{aligned} u'(t) &= au(t) - bu(t)^2 - ru(t)v(t), & t \geq 0, \\ v'(t) &= cv(t) - dv(t)^2 - su(t)v(t), & t \geq 0, \\ u(0) &= u_0, & v(0) = v_0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

für Anfangswerte $u_0 \geq 0$ und $v_0 \geq 0$. Wir erhalten $\bar{t}(u_0, v_0) = +\infty$ und die Lösungen bleiben nichtnegativ.

BEWEIS. Wir schreiben $f(u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$ für die rechte Seite von (4.14). Seien $x, y \geq 0$. Dann gelten

$$\text{für } x = 0 : \quad f_1(0, y) = 0, \quad \text{für } y = 0 : \quad f_2(x, 0) = 0.$$

Gemäß Satz 4.12 bleibt die Lösung auf $[0, \bar{t}(u_0, v_0))$ nichtnegativ. Sei $(x, y) \in M := \mathbb{R}_{\geq 0}^2$. Dann berechnen wir

$$\begin{aligned} (f(x, y)|(x, y)) &= ax^2 - bx^3 - rx^2y + cy^2 - dy^3 - sxy^2 \leq ax^2 + cy^2 \\ &\leq \max\{a, c\}(1 + |(x, y)|_2^2), \end{aligned}$$

wobei wesentlich $x, y \geq 0$ einging. Mit Satz 4.10 folgt $\bar{t}(u_0, v_0) = +\infty$. $\square$

c) Im *Räuber-Beute-Modell* beschreibt $u(t)$ die Größe einer Beutepopulation mit beschränktem Wachstum und $v(t)$ die Größe der Räuberspezies, welche sich nur von dieser Beute ernährt, siehe Beispiel 5.1 in Analysis 2. Für Startwerte $u_0, v_0 \geq 0$ und Konstanten $a, b, c, r, s \geq 0$ erhalten wir das System

$$\begin{aligned} u'(t) &= au(t) - bu(t)^2 - ru(t)v(t), & t \geq 0, \\ v'(t) &= -cv(t) + su(t)v(t), & t \geq 0, \\ u(0) &= u_0, & v(0) = v_0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Wieder existiert die Lösung für alle $t \geq 0$ und bleibt nichtnegativ.

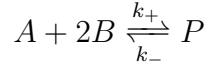
BEWEIS. Wie in Teil b) zeigt man, dass die Lösung auf $J_+ = [0, \bar{t}(u_0, v_0))$ nichtnegativ ist. Wir können aber wegen des Terms $+suv$ nicht mehr Satz 4.10 anwenden. In Beispiel 6.13 wird ein stärkeres Instrument zum Ziel führen, aber wir

können auch direkter argumentieren. Wir nutzen dabei aus, dass beide kritischen quadratischen Terme in der ersten Gleichung von (4.15) ein günstiges negatives Vorzeichen haben. Da $u, v \geq 0$ sind, folgt demnach $u'(t) \leq au(t)$ und per Integration

$$u(t) \leq u_0 + a \int_0^t u(\tau) d\tau$$

für alle $t \in J_+$. Das Gronwallsche Lemma 4.5 liefert also $u(t) \leq e^{at}u_0$ für $t \in J_+$. Wir nehmen nun an $T := \bar{t}(u_0, v_0)$ wäre endlich. Dann wird $u = |u|$ auf J_+ durch $C := e^{aT}u_0$ dominiert. Somit liefert die zweite Identität in (4.15) die Ungleichung $v' \leq sCv$ auf J_+ . Wie eben erhalten wir daraus die Schranke $0 \leq v(t) \leq e^{sCT}v_0$ auf J_0 . Mithin ist (u, v) auf J_+ beschränkt. Da hier $D = \mathbb{R}^2$ ist, haben wir einen Widerspruch zu (4.11) gefunden, sodass $\bar{t}(u_0, v_0) = +\infty$ sein muss. Man beachte aber, dass dieses Argument nur eine sehr grobe Schranke für $(u(t), v(t))$ liefert, vergleiche Beispiel 6.13, und schon bei einem Term $+suv^2$ versagen würde. $\square$

d) Seien $a(t), b(t)$ und $p(t)$ die Konzentrationen der Stoffe A, B und P in der Gleichgewichtsreaktion



für Reaktionskonstanten $k_{\pm} \geq 0$. Mit Massenwirkungskinetik erhält man die Reaktionsgleichungen

$$\begin{aligned} a'(t) &= -k_+a(t)b(t)^2 + k_-p(t), & t \geq 0, \\ b'(t) &= -2k_+a(t)b(t)^2 + 2k_-p(t), & t \geq 0, \\ p'(t) &= k_+a(t)b(t)^2 - k_-p(t), & t \geq 0, \\ a(0) &= a_0 \geq 0, \quad b(0) = b_0 \geq 0, \quad p(0) = p_0 \geq 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Dieses System hat genau eine nichtnegative beschränkte Lösung (a, b, p) auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

BEWEIS. Wir bezeichnen die rechte Seite mit f . Seien $a, b, p \geq 0$. Dann gelten

$$f_1(0, b, p) = k_-p \geq 0, \quad f_2(a, 0, p) = 2k_-p \geq 0, \quad f_3(a, b, 0) = k_+ab^2 \geq 0.$$

Satz 4.12 impliziert die Ungleichungen $a(t), b(t), p(t) \geq 0$ für alle $t \in [0, \bar{t}(a_0, b_0, p_0))$.

Wegen des positiven kubischen Terms in der dritten Zeile von (4.16) können wir Satz 4.10 trotz der Positivität der Lösung nicht verwenden. Wir nutzen stattdessen die Struktur des Systems. Man sieht, dass der kritische Summand k_+ab^2 auch in den ersten beiden Zeilen mit einem ‘guten’ negativen Vorzeichen vorkommt. Deswegen betrachten wir die Funktion $\varphi(t) = a(t) + b(t) + 3p(t)$ für $t \in J$. Die Gleichungen (4.16) liefern die Ableitung

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= a'(t) + b'(t) + 3p'(t) \\ &= -k_+a(t)b(t)^2 + k_-p(t) - 2k_+a(t)b(t)^2 + 2k_-p(t) + 3k_+a(t)b(t)^2 - 3k_-p(t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

sodass $\varphi(t) = \varphi(0)$ für alle $t \in J$ gilt. Weiter haben wir $0 \leq a(t), b(t), p(t) \leq \varphi(t) = \varphi(0)$. Also ist die Lösung für alle Zeiten beschränkt und damit nach Theorem 4.9 b) global. (Dies ist ein Spezialfall des Vorgehens in Abschnitt 6.3.) $\square$

4.3. Dynamische Systeme

Bislang hatten wir eher einzelne Lösungen von (4.1) zu einem festen Anfangswert u_0 im Blick. Um das qualitative Verhalten des Systems im Ganzen zu untersuchen, ändern wir unseren Gesichtspunkt ein wenig. Dies gelingt am besten im autonomen Fall, auf den wir uns in diesen Abschnitt beschränken.

Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ lokal Lipschitz, $x \in D$, $J = \mathbb{R}$, $t_0 = 0$, $u_0 = x$ und $u : J_{\max}(x) \rightarrow D$ die maximale Lösung von (4.1). Wir setzen $\varphi(t, x) := u(t)$ für $t \in J_{\max}(x)$. Offenbar gilt $\varphi(0, x) = x$. Theorem 4.9 c) impliziert die Aussage

$$\varphi : D_f := \{(t, x) \mid x \in D, t \in J_{\max}(x)\} \rightarrow D \quad \text{ist stetig.} \quad (4.17)$$

Sei weiter $s \in J_{\max}(x)$. Dann haben wir die maximale Lösung $v(t) := \varphi(t, \varphi(s, x))$ für $t \in J_{\max}(\varphi(s, x))$ von (4.1) mit Anfangswert $v(0) = \varphi(s, x) = u(s)$. Laut Lemma 4.6 löst die Funktion $w(t) := \varphi(t + s, x) = u(t + s)$ auch dieses Problem für $t \in J_{\max}(x) - s$. Gemäß Lemma 4.8 und (4.10) gilt nun $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$ für alle $t \in J_{\max}(x) - s \subseteq J_{\max}(\varphi(s, x))$. Wenn etwa $\bar{t}(x) - s < \bar{t}(\varphi(s, x))$ wäre, gäbe es laut (4.11) für u solche Zeitpunkte $t_n \rightarrow \bar{t}(x) - s$ für $n \rightarrow \infty$, dass die Vektoren $w(t_n) = u(t_n + s)$ gegen ∂D oder im Betrag gegen $+\infty$ strebten. Da $w(t_n) = v(t_n)$ ist, widerspricht dies der Annahme $\bar{t}(x) - s < \bar{t}(\varphi(s, x))$. Das Infimum von $J_{\max}(\varphi(s, x))$ behandelt man entsprechend. Die Abbildung φ besitzt also die Eigenschaft

$$\begin{aligned} \forall x \in D, s \in J_{\max}(x) : \quad J_{\max}(\varphi(s, x)) &= J_{\max}(x) - s \quad \text{und} \\ \forall t \in J_{\max}(x) - s : \quad \varphi(t + s, x) &= \varphi(t, \varphi(s, x)), \quad \varphi(0, x) = x. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Wenn $J_{\max}(x) = \mathbb{R}$ für alle $x \in D$ ist, dann vereinfachen sich (4.17) und (4.18) zu

$$\varphi : \mathbb{R} \times D \rightarrow D \quad \text{ist stetig,} \quad (4.19)$$

$$\forall t, s \in \mathbb{R}, x \in D : \quad \varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x)), \quad \varphi(0, x) = x. \quad (4.20)$$

(Gruppeneigenschaft)

Diese Beobachtungen führen auf die folgenden wichtigen Begriffe.

DEFINITION 4.14. Eine Abbildung φ , die (4.17) und (4.18) erfüllt, heißt lokaler Fluss. Wenn sie den Bedingungen (4.19) und (4.20) genügt, dann nennt man sie Fluss (oder dynamisches System). Wenn man hier nur $J = \mathbb{R}_{\geq 0}$ statt $J = \mathbb{R}$ zulässt, spricht man von einem positiven (lokalen) Halbfluss.

Man schreibt $\varphi_t : x \mapsto \varphi(t, x)$ und nennt $\gamma(x) = \{\varphi(t, x) \mid t \in J_{\max}(x)\}$ den Orbit oder die Trajektorie durch x . Weiter ist $\gamma_+(x) = \{\varphi(t, x) \mid t \in [0, \bar{t}(x))\}$ der Vorwärtsorbit durch x .

Genauer gesagt, ist φ_t eine Abbildung von $\{x \in D \mid t \in J_{\max}(x)\}$ nach D , und im Flussfall von D nach D . Ein Beispiel für einen Fluss ist $\varphi(t, x) = e^{tA}x$ für $f(x) = Ax$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, siehe Abschnitt 4.5. Weitere Beispiele werden in den Übungen diskutiert. Lokale Flüsse haben eine Reihe grundlegender Eigenschaften, die man häufig bei der Untersuchung von (4.1) verwendet.

SATZ 4.15. *Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ lokal Lipschitz und φ wie oben definiert. Dann ist φ ein lokaler Fluss. (Wir nennen φ den von f erzeugten lokalen Fluss.) Weiter gelten die folgenden Aussagen (Teile a)–c) sogar für jeden (lokalen) Fluss auf D).*

a) *Wenn φ sogar ein Fluss ist, dann ist $\varphi_t : D \rightarrow D$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein Homöomorphismus mit $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$.*

b) *Für alle $x, y \in D$ ist entweder $\gamma(x) = \gamma(y)$ oder $\gamma(x) \cap \gamma(y) = \emptyset$. Also liegt jedes $x \in D$ auf genau einem Orbit.*

c) *Es gibt genau die drei folgenden Orbits.*

1) Fixpunkte: $\forall t \in \mathbb{R} = J_{\max}(x)$ gilt $\varphi(t, x) = x$.

2) periodische Orbits mit Minimalperiode $p > 0$:

$$\forall t \in \mathbb{R} = J_{\max}(x) \text{ gilt } \varphi(t + p, x) = \varphi(t, x).$$

3) aperiodische Orbits: $\forall t, s \in J_{\max}(x)$ mit $t \neq s$ gilt $\varphi(t, x) \neq \varphi(s, x)$.

d) *Sei $x_n \rightarrow x$ in D für $n \rightarrow \infty$. Dann erhalten wir $\bar{t}(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \bar{t}(x_n)$ und $\underline{t}(x) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \underline{t}(x_n)$. Weiter ist D_f offen.*

BEWEIS. Die erste Behauptung haben wir oben gezeigt, und Aussage d) folgt aus Theorem 4.9 c).

a) Sei φ ein Fluss und $t \in \mathbb{R}$. Die Eigenschaft (4.20) liefert dann

$$x = \varphi(t - t, x) = \varphi(t, \varphi(-t, x)) = \varphi(-t, \varphi(t, x))$$

für alle $x \in D$, sodass $\varphi_{-t} : D \rightarrow D$ die (stetige) Inverse von $\varphi_t : D \rightarrow D$ ist.

b) Seien $x \neq y$ Punkte in D mit $\varphi(s, x) = \varphi(t, y) =: z$ für $s \in J_{\max}(x)$ und $t \in J_{\max}(y)$. Dann liegt $-s$ in $J_{\max}(x) - s = J_{\max}(z) = J_{\max}(y) - t$ und es gilt

$$x = \varphi(-s, \varphi(s, x)) = \varphi(-s, \varphi(t, y)) = \varphi(t - s, y)$$

wobei mehrfach (4.18) einging. Für jedes $r \in J_{\max}(x) = J_{\max}(y) - t + s$ erhalten wir nun

$$\varphi(r, x) = \varphi(r, \varphi(t - s, y)) = \varphi(r + t - s, y).$$

Somit ist $\gamma(x) \subseteq \gamma(y)$. Die umgekehrte Inklusion beweist man analog.

c) Zunächst nehmen wir an, es sei $\varphi(\tau, y) = y$ für einen Punkt $y \in D$ und eine Zeit $\tau > 0$ in $J_{\max}(y)$. Dann gilt $J_{\max}(y) = J_{\max}(\varphi(\tau, y)) = J_{\max}(y) - \tau$ laut (4.18). Dies ist aber nur für $J_{\max}(y) = \mathbb{R}$ möglich. Weiter liefert (4.18) für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\varphi(t, y) = \varphi(t, \varphi(\tau, y)) = \varphi(t + \tau, y).$$

Sei nun $p \geq 0$ das Infimum solcher τ für das gegebene y . Es existieren also Zeiten $\tau_n \rightarrow p$ mit $\varphi(\tau_n + t, y) = \varphi(t, y)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Da φ stetig ist, erhalten wir $\varphi(p + t, y) = \varphi(t, y)$ für jedes t . Im Falle $p > 0$ ist somit $\gamma(y)$ periodisch mit Minimalperiode p . Sei $p = 0$. Fixiere $t \in \mathbb{R}$. Es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ Zahlen $m_n \in \mathbb{Z}$ und $\rho_n \in [0, \tau_n)$ mit $t = m_n \tau_n + \rho_n$. Daraus folgt die Identität

$$\varphi(t, y) = \varphi(\tau_n + (m_n - 1)\tau_n + \rho_n, y) = \varphi((m_n - 1)\tau_n + \rho_n, y) = \cdots = \varphi(\rho_n, y)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Hier können wir den Grenzwert $n \rightarrow \infty$ bilden. Da (ρ_n) eine Nullfolge ist, ergibt sich $\varphi(t, y) = y$. Also ist y ein Fixpunkt.

Sei schließlich $\varphi(s, x) = \varphi(t, x)$ für gewisse $s \neq t$ in $J_{\max}(x)$. Es sei etwa $t > s$. Dann impliziert (4.18) die Identität $\varphi(s, x) = \varphi(t - s, \varphi(s, x))$, und $y := \varphi(s, x)$ ist nach den obigen Betrachtungen entweder ein Fixpunkt oder periodisch. Insgesamt ist Teil c) gezeigt. $\square$

Man nennt Fixpunkte auch Gleichgewichte, Equilibria, Ruhelagen oder stationäre Lösungen. Beispiel 1.32 c) in Analysis 2 zeigt, dass im Falle nur stetiger f Lösungen sich schneiden oder zusammen- bzw. auseinanderlaufen können.

Wir werden im nächsten Kapitel in einfachen Situationen periodische Orbits nachweisen. Im allgemeinen ist dies aber eine schwierige Aufgabe. Fixpunkte sind (im autonomen Fall) aber deutlich einfacher zu finden.

BEMERKUNG 4.16. Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und $u_* \in D$. Genau dann ist u_* ein Fixpunkt von (4.1), wenn $f(u_*) = 0$ gilt. In der Tat löst $u(t) = u_*$ für alle $t \in \mathbb{R}$ im Falle $f(u_*) = 0$ das Problem (4.1) mit Anfangswert u_* . Wenn $u(t) = u_*$ eine Lösung von (4.1) ist, dann folgt $0 = u'(t) = f(u_*)$. $\diamond$

Der von f erzeugte lokale Fluss φ ist laut Theorem 4.9 lokal Lipschitz in (t, x) und außerdem C^1 in der Zeit t . Es stellt sich nun die Frage, ob er auch stetig differenzierbar im Anfangswert x ist, wenn f zu $C^1(D, \mathbb{R}^m)$ gehört. Diese Aussage wird in späteren Vorlesungen benötigt, und die zugehörigen Beweistechniken spielen auch bei komplexeren Problemen eine Rolle. Wir wollen zuerst sehen, was die stetige Differenzierbarkeit von φ für (4.1) bedeutet.

Seien dazu $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ und $k \in \{1, \dots, m\}$. Wir *nehmen an*, dass die Abbildungen $x \mapsto \varphi(t, x)$ und $t \mapsto \partial_x \varphi(t, x)$ stetig differenzierbar bei jedem $(t, x) \in D_f$ sind. Das Schwarzsche Theorem 3.24 aus Analysis 2 zeigt dann die stetige Differenzierbarkeit von $x \rightarrow \partial_t \varphi(t, x)$ und $\partial_t \partial_k \varphi = \partial_k \partial_t \varphi$ auf D_f . Gemäß (4.1) ist ferner $\partial_t \varphi = f \circ \varphi$ stetig auf D_f . Wir differenzieren nun (4.1), also die Gleichungen $\partial_t \varphi(t, x) = f(\varphi(t, x))$ und $\varphi(0, x) = x$, nach x_k . Unsere Annahmen und die Kettenregel liefern das System

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_k \varphi(t, x) &= \partial_k \partial_t \varphi(t, x) = \partial_k f(\varphi(t, x)) = f'(\varphi(t, x)) \partial_k \varphi(t, x), & t \in J_{\max}(x), \\ \partial_k \varphi(0, x) &= e_k, \end{aligned}$$

wobei $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ ist. Wir setzen $A_x(t) := f'(\varphi(t, x)) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ für $t \in J_{\max}(x)$. Somit löst die Abbildung $t \mapsto \partial_k \varphi(t, x)$ die *Variationsgleichung*

$$\begin{aligned} v'(t) &= A_x(t)v(t), & t \in J_{\max}(x), \\ v(0) &= e_k, \end{aligned} \tag{4.21}$$

von (4.1) entlang $\gamma(x)$. Diese lineare Gleichung läßt sich meist leichter untersuchen als (4.1), zumal wenn sie (für Fixpunkte x) autonom ist. Vor allem kann man oft Aussagen über ihr Verhalten auf die Lösungen von (4.1) in der Nähe von $\gamma(x)$ übertragen, vergleiche Theorem 6.6. Wir zeigen nun, dass die oben gemachten Annahmen stets gelten.

THEOREM 4.17. *Seien $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ und φ der von f erzeugte Fluss. Dann liegt φ in $C^1(D_f, \mathbb{R}^m)$ und für jedes $k \in \{1, \dots, m\}$ existiert $\partial_t \partial_k \varphi = \partial_k \partial_t \varphi \in C(D_f, \mathbb{R}^m)$. Weiter löst $\partial_k \varphi(\cdot, x)$ die Gleichung (4.21).*

BEWEIS. 1) Seien $x \in D$ und $A_x(t) = f'(\varphi(t, x))$ für $t \in J_{\max}(x) =: J_0$. Nach (4.18) ist die Abbildung $(t, x) \mapsto A_x(t)$ von D_f nach $L(\mathbb{R}^m)$ stetig. Wie in Beispiel 5.11 in Analysis 2 sieht man, dass das Problem (4.21) genau eine Lösung $v_k = v_k(\cdot; x)$ auf J_0 hat. Wenn wir Theorem 4.9 mit $\tilde{f}(t, y) := A_x(t)y$ anwenden, erhalten wir die Stetigkeit der Funktion $(t, x) \mapsto v_k(t, x)$ auf D_f . Wegen (4.21) ist somit auch die Ableitung $(t, x) \mapsto \partial_t v_k(t, x)$ auf D_f stetig. Wir zeigen nun, dass φ auf D_f die partielle Ableitung $\partial_k \varphi(t, x) = v_k(t, x)$ besitzt. Mittels der Vorbetrachtungen folgt dann das Theorem. (Man beachte, dass die Gleichung (4.21) einem hierbei die Differenzierbarkeit von $\partial_k \varphi(t, x)$ nach t schenkt.)

2) Sei $x \in D$ fest und $t \in J_0$. Da D_f nach Satz 4.15 offen ist, ist der Abstand r von $\langle 0, t \rangle \times \{x\}$ zu ∂D_f positiv und wir erhalten $\langle 0, t \rangle \times \overline{B}(x, r_0) \subseteq D_f$ für $r_0 \in (0, r)$. Sei $h \in [-r_0, r_0]$. Wir betrachten den umgeschriebenen Differenzenquotienten

$$w_h(t) := \varphi(t, x + he_k) - \varphi(t, x) - hv_k(t, x) \quad \text{und} \quad d_h(t) := \varphi(t, x + he_k) - \varphi(t, x).$$

Der Beweis beruht darauf, dass nach (4.1) und (4.21) die Funktion w_h der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} w_h'(t) &= f(\varphi(t, x + he_k)) - f(\varphi(t, x)) - hA_x(t)v_k(t, x) = A_x(t)w_h(t) + g_h(t), \\ w_h(0) &= x + he_k - x - he_k = 0, \end{aligned}$$

für $t \in J_0$ genügt. Dabei setzen wir

$$g_h(t) := f(\varphi(t, x + he_k)) - f(\varphi(t, x)) - f'(\varphi(t, x))d_h(t).$$

Um diesen Ausdruck mittels der Differenzierbarkeit von f zu kontrollieren, nutzen wir Theorem 4.9 c). Dieses liefert so eine Konstante $c > 0$ und einen Radius $r_1 \in (0, r_0]$ mit $cr_1 \leq r_0$, dass für alle $|h| \leq r_1$ und $s \in \langle 0, t \rangle$ die Lipschitzbedingung

$$|d_h(s)|_2 \leq c|h| \leq cr_1 \leq r_0 \tag{4.22}$$

gilt. Nach (einer kleinen Variante von) Satz 5.20 aus Analysis 2 ist w_h durch die Duhamelsche Formel

$$w_h(t) = \int_0^t U_x(t, s) g_h(s) \, ds, \quad t \in J_0,$$

gegeben, wobei U_x der Lösungsoperator zu A_h ist. Die Stetigkeit von U_x in s liefert

$$C := \max_{s \in \langle 0, t \rangle} \|U_x(t, s)\| < +\infty.$$

Somit wird w_h durch g_h mittels

$$|w_h(t)|_2 \leq C|t| \max_{s \in \langle 0, t \rangle} |g_h(s)|_2 \quad (4.23)$$

für $|h| \leq r_1$ kontrolliert. Mit dem Hauptsatz und der Kettenregel können wir g_h zu

$$\begin{aligned} g_h(s) &= \int_0^1 \partial_\tau f(\tau \varphi(s, x + h e_k) + (1 - \tau) \varphi(s, x)) \, d\tau - f'(\varphi(s, x)) d_h(s) \\ &= \int_0^1 (f'(z(\tau, s)) - f'(\varphi(s, x))) d_h(s) \, d\tau \end{aligned} \quad (4.24)$$

für $s \in \langle 0, t \rangle$ umformen, wobei

$$z(\tau, s) := \tau \varphi(s, x + h e_k) + (1 - \tau) \varphi(s, x) = \tau d_h(s) + \varphi(s, x).$$

ist. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir setzen $K = \bigcup_{s \in \langle 0, t \rangle} \overline{B}(\varphi(s, x), r_0)$. Diese Menge ist nach dem Beweis von Theorem 4.9 kompakt, sodass f' auf K gleichmäßig stetig ist. Seien $\tau \in [0, 1]$ und $s \in \langle 0, t \rangle$. Da $|\tau d_h(s)|_2 \leq r_0$ ist (siehe (4.22)), liegt auch $z(\tau, s)$ in K . Wegen (4.22) finden wir ferner so einen Radius $\delta = \delta_\varepsilon \in (0, r_1]$, dass für $|h| \leq \delta$ die Ungleichung

$$|f'(z(\tau, s)) - f'(\varphi(s, x))|_2 \leq \varepsilon$$

gilt. Wenn wir dies und (4.22) in die Formeln (4.23) und (4.24) einsetzen, erhalten wir die Ungleichung

$$|w_h(t)| \leq C|t| \varepsilon \max_{s \in \langle 0, t \rangle} |d_h(s)|_2 \leq \varepsilon c C |t| |h|$$

für alle $|h| \leq \delta$. Das heißt aber gerade, dass $\partial_k \varphi(t, x) = v_k(t, x)$ existiert. $\square$

4.4. Randwertprobleme

Bislang haben wir durchweg Anfangswertprobleme behandelt, die die zeitliche Entwicklung eines dynamischen Systems beschreiben. In diesem Abschnitt diskutieren wir ein anderes Anwendungsfeld gewöhnlicher Differentialgleichungen, das in späteren Vorlesungen vertieft wird. Das Thema wird etwa in [8] systematischer und umfangreicher behandelt. Wir beginnen mit einem typischen Beispiel.

BEISPIEL 4.18. Sei $u(t, x)$ die Auslenkung einer eindimensionalen Saite am Ort $x \in [0, 1]$ zur Zeit $t \geq 0$. Dabei seien die Endpunkte 0 und 1 der Saite festgeklemt

und die Saite bei $t = 0$ in Ruhe. (Siehe Beispiel 4.24 in Analysis 3.) Unter gewissen Annahmen an die Saite erfüllt u dann die Wellengleichung

$$\begin{aligned}\partial_{tt}u(t, x) &= a\partial_{xx}u(t, x), & x \in [0, 1], \quad t \geq 0, \\ u(t, 0) &= u(t, 1) = 0, & t \geq 0, \\ u(0, x) &= v(x), \quad \partial_t u(0, x) = 0, & x \in [0, 1],\end{aligned}\tag{4.25}$$

für eine (Material-)Konstante $a > 0$ und eine gegebene Anfangsauslenkung v in $C^2([0, 1], \mathbb{R})$. Wir suchen eine spezielle Lösung der Form $u(t, x) = \cos(\omega t)v(x)$ für eine zu bestimmende Konstante $\omega \in \mathbb{R}$. So eine Funktion beschreibt eine “stehende Welle” mit Frequenz $\frac{\omega}{2\pi}$. Sie existiert genau dann, wenn

$$\partial_{tt}u(t, x) = -\omega^2 \cos(\omega t)v(x) = a\partial_{xx}u(t, x) = a \cos(\omega t)v''(x)$$

für alle $t \geq 0$ und $x \in [0, 1]$, sowie $v(0) = v(1) = 0$ erfüllt sind. Dies ist zum *Randwertproblem*

$$v''(x) + \frac{\omega^2}{a}v(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad v(0) = v(1) = 0,\tag{4.26}$$

für das Wellenprofil v äquivalent. In diesem Problem steht die Variable x für den Ort, und nicht wie t im Anfangswertproblem (4.1) für die Zeit.

Die Funktionen $v_1(x) = \sin(\omega a^{-1/2}x)$ und $v_2(x) = \cos(\omega a^{-1/2}x)$ genügen der Differentialgleichung in (4.26). Nach Satz 5.20 aus Analysis 2 sind alle Lösungen dieser Gleichung Linearkombinationen von v_1 und v_2 . Wenn wir $v = c_1v_1 + c_2v_2$ für reelle c_j in die Randbedingungen von (4.26) einsetzen, erhalten wir die Identitäten

$$\begin{aligned}0 &= v(0) = c_1v_1(0) + c_2v_2(0) = c_2, \\ 0 &= v(1) = c_1v_1(1) + c_2v_2(1) = c_1 \sin(\omega a^{-1/2}),\end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile $c_2 = 0$ verwendet haben. Somit muss die Frequenz der Beziehung $\omega = k\sqrt{a}\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ genügen. Weiter sind alle Lösungen von (4.26) durch $v(x) = c \sin(k\pi x)$ mit einem beliebigen Faktor $c \in \mathbb{R}$ gegeben.

Die Funktion $u(t, x) = c \cos(k\pi\sqrt{a}t) \sin(k\pi x)$ für $t \geq 0$ und $0 \leq x \leq 1$ löst schließlich das Problem (4.25) mit $v(x) = c \sin(k\pi x)$. $\diamond$

Wir betrachten allgemeine lineare Randwertprobleme 2-ter Ordnung der Form

$$\begin{aligned}(Lv)(x) &:= a_2(x)v''(x) + a_1(x)v'(x) + a_0(x)v(x) = h(x), & a \leq x \leq b, \\ R_j v &:= \alpha_{j1}v'(a) + \alpha_{j0}v(a) + \beta_{j1}v'(b) + \beta_{j0}v(b) = \gamma_j, & j \in \{1, 2\}.\end{aligned}\tag{4.27}$$

(Probleme n -ter Ordnung behandelt man analog.) Gegeben sind hierbei die Funktionen $a_k, h \in C([a, b], \mathbb{R})$ mit $a_2(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und die Zahlen $\alpha_{jk}, \beta_{jk}, \gamma_j \in \mathbb{R}$. Man beachte, dass die Abbildungen $L : C^2([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R})$ und $R_j : C^2([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ linear und stetig sind (für die Norm $\max\{\|f''\|_\infty, \|f'\|_\infty, \|f\|_\infty\}$ in C^2). In (4.26) hatten wir $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = \omega^2/a$, $h = 0$, $\gamma_j = 0$, $\alpha_{10} = 1$, $\beta_{20} = 1$, und die anderen α_{jk} und β_{jk} waren 0.

Wir suchen eine Lösung $v \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ von (4.27). Nach Lemma 4.1 ist die Differentialgleichung $Lv = 0$ zu einem linearen System erster Ordnung mit Lösungen (v, v') äquivalent. Satz 5.20 in Analysis 2 liefert deshalb linear unabhängige Lösungen v_1 und v_2 von $Lv = 0$ und eine Lösung v_* von $Lv = h$. (Auch (v_1, v_1') und (v_2, v_2') sind linear unabhängig.) Weiter ist jede Lösung v von $Lv = h$ mittels Koeffizienten $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ durch

$$v = v(c) = v_* + c_1 v_1 + c_2 v_2 \quad (4.28)$$

gegeben. (Wir wählen $v_* = 0$, wenn $h = 0$ ist.) Die Zahlen c_k müssen nun so gewählt werden, dass v auch die Randbedingungen in (4.27) erfüllt, also die Gleichungen

$$R_j v = R_j(v_*) + c_1 R_j(v_1) + c_2 R_j(v_2) = \gamma_j \quad j \in \{1, 2\},$$

gelten. Dazu setzen wir $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$,

$$M = (R_j(v_k))_{jk} \quad \text{und} \quad z = \begin{pmatrix} \gamma_1 - R_1(v_*) \\ \gamma_2 - R_2(v_*) \end{pmatrix}.$$

Somit löst $v(c)$ genau dann das Randwertproblem (4.27), wenn $Mc = z$ ist.

Wir können nun das Lösungsverhalten des Anfangsrandwertproblems mittels M und z charakterisieren. Man beachte den dramatischen Unterschied im Fall b) zur eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems (4.1) und (4.2) unter der lokalen Lipschitzbedingung.

THEOREM 4.19. *Unter den obigen Annahmen gelten die folgenden Aussagen.*

a) *Genau dann ist $\det M \neq 0$, wenn das homogene Problem (4.27) mit $h = 0$ und $\gamma = 0$ nur die triviale Lösung $v = 0$ hat. In diesem Fall ist v aus (4.28) mit $c = M^{-1}z$ die einzige Lösung des inhomogenen Problems (4.27) zu gegebenen Daten $h \in C([a, b], \mathbb{R})$ und $\gamma \in \mathbb{R}^2$.*

b) *Genau dann ist $\det M = 0$, wenn das homogene Problem (4.27) mit $h = 0$ und $\gamma = 0$ eine Lösung $v \neq 0$ besitzt. In diesem Fall gibt es genau dann eine Lösung von (4.27), wenn z im Bild von M liegt. Alle Lösungen sind dabei durch (4.28) für jedes $c \in \mathbb{R}^2$ mit $Mc = z$ gegeben.*

BEWEIS. a) Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass $\det M$ genau dann ungleich 0 ist, wenn für jeden Vektor $z \in \mathbb{R}^2$ genau ein Urbild $c \in \mathbb{R}^2$ mit $Mc = z$ existiert. Nach den Vorbetrachtungen ist dies äquivalent zur eindeutigen Lösbarkeit von (4.27) durch die Funktion $v(M^{-1}z)$.

b) Außerdem ist $\det M$ genau dann gleich 0, wenn es einen Vektor $\bar{c} \neq 0$ mit $M\bar{c} = 0$ gibt. Dies ist gleichwertig zur Existenz einer nichttrivialen Lösung $v = v(\bar{c})$ von (4.27) mit $h = 0$ und $\gamma = 0$. (Hier ist $v_* = 0$.) Auf Grund der Vorüberlegungen hat (4.27) für z außerhalb des Bildes von M keine Lösung. Wenn $z = Mc$ ist, dann löst $v(c)$ das Problem (4.27). $\square$

Teil a) zeigt auch, dass die Invertierbarkeit von M nicht von der Wahl der Basis $\{v_1, v_2\}$ des Vektorraums $\{v \in C^2([a, b], \mathbb{R}) \mid Lv = 0\}$ abhängt.

In Beispiel 4.18 sind $v_1(x) = \sin(\omega a^{-1/2}x)$, $v_2(x) = \cos(\omega a^{-1/2}x)$, $R_1 v_1 = v_1(0) = 0$, $R_1 v_2 = 1$, $R_2 v_1 = \sin(\omega a^{-1/2})$ und $R_2 v_2 = \cos(\omega a^{-1/2})$. Damit ist

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\omega a^{-1/2}) & \cos(\omega a^{-1/2}) \end{pmatrix}$$

genau für $\omega \in \pi\sqrt{a}\mathbb{Z}$ nicht invertierbar und damit gibt es genau in diesem Fall eine Lösung $v \neq 0$ des homogenen Randwertproblems mit $h = 0$ und $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Diese Lösungen bilden den eindimensionalen Teilraum $\{c \sin(\omega a^{-1/2} \cdot) \mid c \in \mathbb{R}\}$.

Wir suchen eine Lösungsformel für (4.27) im Spezialfall

$$(\gamma_1, \gamma_2) = 0, \quad R_1 v = \alpha_0 v(a) + \alpha_1 v'(a) \quad \text{und} \quad R_2 v = \beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b). \quad (4.29)$$

Dabei nehmen wir an, dass das Problem $Lv = 0$ und $R_j(v) = 0$ eindeutig lösbar ist. Wir benötigen zwei linear unabhängige Lösungen v_1 und v_2 von $Lv = 0$ mit

$$(R_j(v_k))_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: M_0.$$

Zunächst haben wir laut Voraussetzung und Theorem 4.19 zwei linear unabhängige Lösungen w_1 und w_2 von $Lv = 0$, für die die Matrix $M = R_j(w_l)_{jl}$ invertierbar ist. Um die Randbedingungen mit M_0 zu gewinnen, machen wir den Ansatz

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

für eine noch zu bestimmende invertierbare Matrix $S = (s_{kl}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Dann gilt

$$R_j(v_k) = s_{k1} R_j(w_1) + s_{k2} R_j(w_2), \quad \text{also} \quad (R_j(v_k))_{jk} = M S^\top.$$

Wir deswegen setzen $S := M_0(M^{-1})^\top$ und erhalten wie gewünscht

$$(R_j(v_k))_{jk} = M M^{-1} M_0^\top = M_0.$$

Für die gesuchte Lösungsformel definieren wir nun

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} = v_1(x)v_2'(x) - v_1'(x)v_2(x), \quad (\text{Wronskideterminante})$$

$$G(x, y) := \begin{cases} \frac{v_1(x)v_2(y)}{a_2(y)W(y)}, & a \leq x \leq y \leq b, \\ \frac{v_1(y)v_2(x)}{a_2(y)W(y)}, & a \leq y < x \leq b. \end{cases} \quad (\text{Greensche Funktion})$$

Dabei ist $W(x) \neq 0$ für $x \in [a, b]$, da (v_1, v_1') und (v_2, v_2') linear unabhängig sind.

SATZ 4.20. *Unter obigen Voraussetzungen ist die eindeutige Lösung von (4.27) durch die Gleichung*

$$v(x) = \int_a^b G(x, y) h(y) dy, \quad a \leq x \leq b,$$

gegeben.

BEWEIS. Die Eindeutigkeit wird durch Theorem 4.19 gesichert, da $\det M \neq 0$ ist. Wir müssen also nur nachrechnen, dass die Funktion

$$v(x) = v_1(x) \int_x^b \frac{v_2(y)}{a_2(y)W(y)} h(y) dy + v_2(x) \int_a^x \frac{v_1(y)}{a_2(y)W(y)} h(y) dy$$

für $x \in [a, b]$ das Problem (4.27) für die Randbedingungen in (4.29) löst. Wir schreiben $g_1(x)$ bzw. $g_2(x)$ für die beiden Integrale. Zunächst gelten

$$v(a) = v_1(a)g_1(a) \quad \text{und} \quad v(b) = v_2(b)g_2(b).$$

Wir differenzieren

$$\begin{aligned} v'(x) &= v_1'(x)g_1(x) - G(x, x)h(x) + v_2'(x)g_2(x) + G(x, x)h(x) \\ &= v_1'(x)g_1(x) + v_2'(x)g_2(x), \\ v'(a) &= v_1'(a)g_1(a), \quad v'(b) = v_2'(b)g_2(b), \\ v''(x) &= v_1''(x)g_1(x) - v_1'(x) \frac{v_2(x)h(x)}{a_2(x)W(x)} + v_2''(x)g_2(x) + v_2'(x) \frac{v_1(x)h(x)}{a_2(x)W(x)} \end{aligned}$$

für $x \in [a, b]$. Diese Gleichungen und $Lv_j = 0$ liefern

$$\begin{aligned} Lv &= a_2v'' + a_1v' + a_0v \\ &= (a_2v_1'' + a_1v_1' + a_0v_1)g_1 + (a_2v_2'' + a_1v_2' + a_0v_2)g_2 + \frac{a_2(v_2'v_1 - v_1'v_2)}{a_2W} h \\ &= h. \end{aligned}$$

Aus $R_1v_1 = 0$ gemäß der Wahl von M_0 schließen wir ähnlich

$$R_1v = \alpha_0v(a) + \alpha_1v'(a) = (\alpha_0v_1(a) + \alpha_1v_1'(a))g_1(a) = 0.$$

Die verbleibende Behauptung $R_2v = 0$ zeigt man genauso. $\square$

BEISPIEL 4.21. Sei $[a, b] = [0, 1]$, $Lv = v''$, $R_1v = v(0)$, $R_2v = v(1)$. Hier sind $v_1(x) = x$, $v_2(x) = 1 - x$, $W(x) = -1$ und

$$G(x, y) = \begin{cases} x(y-1), & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ y(x-1), & 0 \leq y < x \leq 1. \end{cases} \quad \diamond$$

4.5. Der lineare autonome Fall

In Theorem 5.23 aus Analysis 2 hatten wir für lineare autonome Anfangswertproblem Lösungsformeln angegeben. Wir leiten nun auf ähnliche (aber etwas elegantere) Weise allgemeine Aussagen zum zugehörigen Fluss her.

Für $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ definieren wir die *Matrizenexponentialfunktion*

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \frac{t^j}{j!} A^j$$

für $t \in \mathbb{R}$, wobei der Grenzwert in $\mathbb{C}^{m \times m}$ gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall in $\mathbb{R}$ existiert, vergleiche (5.26) in Analysis 2. Für reelle A ist auch e^{tA} reell. Seien $t, s \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Satz 5.21 in Analysis 2 liefert die folgenden Aussagen.

$$\begin{aligned} \exists \left(\frac{d}{dt}\right)^n e^{tA} &= A^n e^{tA} = e^{tA} A^n, \\ e^{(t+s)A} &= e^{tA} e^{sA} = e^{sA} e^{tA}, \quad e^{0A} = I, \\ \exists (e^{tA})^{-1} &= e^{-tA}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Für $u_0 \in \mathbb{R}^m$ und $g \in C(J, \mathbb{R}^m)$ mit $0 \in J$ ist

$$u(t) = e^{tA} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} g(s) ds, \quad t \in J, \quad (4.31)$$

die einzige Lösung des Systems

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) + g(t), \quad t \in J, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Insbesondere ist $\varphi(t, x) = e^{tA}x$ der Fluss zu (4.32) mit $g = 0$.

Wie in Beispiel 3.25 in Analysis 1 folgen aus $AB = BA$ für $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ die Gleichungen

$$e^{(A+B)} = e^A e^B = e^B e^A. \quad (4.33)$$

Für nichtkommutierende Matrizen A und B ist dies im allgemeinen falsch.

Wir berechnen nun e^{tA} in einigen Spezialfällen. Sei zuerst $A = \lambda I$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt $(\lambda I)^n = \lambda^n I$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$e^{t\lambda I} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^n}{n!} I = e^{\lambda t} I$$

für $t \in \mathbb{R}$. Für die *nilpotente* Matrix

$$A = N_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

erhält man

$$N_m^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

etc., sowie $N_m^n = 0$ für alle $n \geq m$. Daraus folgt

$$e^{tN_m} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{t^n}{n!} N_m^n = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & & t^{m-1}/(m-1)! \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & t^2/2 \\ & & & & \ddots & t \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} =: P_m(t)$$

für $t \in \mathbb{R}$. Für den *Jordanblock*

$$A = \lambda I + N_m =: J(\lambda, m)$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$ impliziert (4.33) nun die Formel

$$e^{tJ(\lambda, m)} = e^{\lambda t} e^{tN_m} = e^{\lambda t} P_m(t) =: P_{\lambda, m}(t).$$

Wir erinnern an die *Jordansche Normalform* von $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$. (Siehe Theoreme 4.6.5 und 4.6.7 von [3].) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ alle verschiedenen Eigenwerte von A mit den jeweiligen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten m_j bzw. d_j in $\mathbb{N}$. Es gilt stets $1 \leq d_j \leq m_j$. Wenn $d_j = m_j$ ist, heißt λ_j *halbeinfach*. Weiter gibt es eine invertierbare Matrix S und natürliche Zahlen k_{jl} für $l \in \{1, \dots, d_j\}$ derart, dass A durch

$$A = SJS^{-1}, \quad J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, k_{11}) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & J(\lambda_1, k_{1d_1}) & \\ & & & \ddots \\ & & & & J(\lambda_N, k_{N1}) \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & J(\lambda_N, k_{Nd_N}) \end{pmatrix},$$

gegeben ist und $k_{j1} + \dots + k_{jd_j} = m_j$ gilt. In den Spalten von S steht eine Basis aus Eigen- und Hauptvektoren von A . Wir setzen ferner

$$s(A) := \max \{ \operatorname{Re} \lambda_j \mid j \in \{1, \dots, N\} \} \quad \text{und} \quad \kappa_j := \max \{ k_{j1}, \dots, k_{jd_j} \} \leq m_j$$

für $j \in \{1, \dots, N\}$. Wir können nun eine Formel für e^{tA} herleiten, die wir exemplarisch ausnutzen, um eine Variante von Theorem 5.26 aus Analysis 2 zu beweisen.

SATZ 4.22. *Gegeben sei $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ mit der Jordanschen Normalform $J = S^{-1}AS$. Für $t \in \mathbb{R}$ ist dann e^{tA} durch das Produkt*

$$e^{tA} = S \begin{pmatrix} P_{\lambda_1, k_{11}}(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_{\lambda_N, k_{Nd_N}}(t) \end{pmatrix} S^{-1} \quad (4.34)$$

gegeben. Weiter gelten die folgenden Abschätzungen.

a) *Es gibt eine Konstante $M \geq 0$ mit*

$$\|e^{tA}\| \leq M \max_{j \in \{1, \dots, N\}} t^{\kappa_j - 1} e^{\operatorname{Re} \lambda_j t} \quad (\forall t \geq 1).$$

b) *Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante $M_\varepsilon \geq 1$ mit*

$$\|e^{tA}\| \leq M_\varepsilon e^{(s(A) + \varepsilon)t} \quad (\forall t \geq 0).$$

c) *Seien alle λ_j mit $\operatorname{Re} \lambda_j = s(A)$ halbeinfach. Dann gibt es ein $M_0 \geq 1$ mit $\|e^{tA}\| \leq M_0 e^{s(A)t}$ für alle $t \geq 0$.*

BEWEIS. 1) Wir diskutieren zunächst einige Vorbereitungen zu Blockmatrizen, wobei $t \in \mathbb{R}$ ist. Für $B_1 \in \mathbb{C}^{k \times k}$ und $B_2 \in \mathbb{C}^{(m-k) \times (m-k)}$ sei

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann folgt induktiv

$$B^2 = \begin{pmatrix} B_1^2 & 0 \\ 0 & B_2^2 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad B^n = \begin{pmatrix} B_1^n & 0 \\ 0 & B_2^n \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit

$$e^{tB} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} B_1^n & 0 \\ 0 & B_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{tB_1} & 0 \\ 0 & e^{tB_2} \end{pmatrix}.$$

Die Jordannormalform von A liefert andererseits

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (SJS^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} SJ^nS^{-1} = Se^{tJ}S^{-1}.$$

Daraus schließen wir die erste Behauptung mittels der Vorbetrachtungen.

2) Seien $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{m-k}$ und B wie oben. Dann gilt $|Bx|_2^2 = |B_1x_1|^2 + |B_2x_2|^2$ und somit $|Bx|_2 \leq \max\{\|B_1\|, \|B_2\|\}|x|_2$. Für $t \geq 1$ erhalten wir nun Aussage a) durch die Abschätzung

$$\|e^{tA}\| \leq \|S\| \max_{j,k} \|P_{\lambda_j,k}(t)\| \|S^{-1}\| \leq c \max_{j \in \{1, \dots, N\}} t^{\kappa_j-1} e^{\operatorname{Re} \lambda_j t}.$$

3) Für alle $\delta > 0$ und $\kappa > 0$ gibt es so eine Konstante $c(\delta, \kappa) > 0$, dass $t^\kappa \leq c(\delta, \kappa)e^{\delta t}$ für alle $t \geq 1$ gilt. Weiter ist $\|e^{tA}\|$ für $t \in [0, 1]$ wegen der Stetigkeit beschränkt. Somit ergibt sich Behauptung b) aus a), wenn wir für alle j den Exponenten $\delta = \varepsilon$ setzen. Im Fall von d) wählen wir $\delta \in (0, s(A) - \operatorname{Re} \lambda_j)$ für die Indizes j mit $\operatorname{Re} \lambda_j < s(A)$ und $\delta = 0$ für die anderen (wo $\kappa_j = 1$ ist). $\square$

KAPITEL 5

Phasenebene und Invarianz

Im ersten Abschnitt gewinnen wir im autonomen Fall einen recht vollständigen Überblick in das Verhalten eindimensionaler und gewisser zweidimensionaler Anfangswertprobleme. Im zweiten Abschnitt finden wir eine leicht nachprüfbare Bedingung an f , die sicherstellt, dass die Lösungen eine konvexe oder glatt berandete Teilmenge von D nicht verlassen.

5.1. Erstes Integral und Phasenebene

Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ lokal Lipschitz, $J = \mathbb{R}$ und $t_0 = 0$. Wir zeigen zuerst die nützliche Tatsache, dass im autonomen Fall eine Lösung in D höchstens gegen einen Fixpunkt konvergieren kann.

LEMMA 5.1. *Seien $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$, $u_0 \in D$, und u löse (4.1) und (4.2) mit $\bar{t}(u_0) = +\infty$. Es gelte $u(t) \rightarrow u_*$ für $t \rightarrow \infty$ und ein $u_* \in D$. Dann erhalten wir $f(u_*) = 0$, sodass u_* nach Bemerkung 4.16 ein Fixpunkt ist.*

BEWEIS. Für $t \geq 0$ folgt aus (4.1) und dem Hauptsatz die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(u_*)|_2 &= \left| \int_t^{t+1} (f(u_*) - f(u(s))) \, ds + \int_t^{t+1} f(u(s)) \, ds \right|_2 \\ &\leq \int_t^{t+1} |f(u_*) - f(u(s))|_2 \, ds + \left| \int_t^{t+1} u'(s) \, ds \right|_2 \\ &\leq \sup_{s \in [t, t+1]} |f(u_*) - f(u(s))|_2 + |u(t+1) - u(t)|_2. \end{aligned}$$

Die rechte Seite strebt nun für $t \rightarrow +\infty$ gegen 0. □

Wir betrachten zuerst den eindimensionalen Fall, in dem wir das Konvergenzverhalten der Lösungen alleine durch die Nullstellen und die Vorzeichenverteilung von f fast vollständig beschreiben können.

SATZ 5.2. *Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz, $u_0 \in D$, $I_+ = (u_0, \sup D)$, $I_- = (\inf D, u_0)$ und u die maximale Lösung von (4.1) und (4.2).*

a) Sei $f(u_0) > 0$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

- 1) Sei $u_+ \in I_+$ eine Nullstelle von f und f sei positiv auf $[u_0, u_+)$. Dann ist $\bar{t}(u_0) = +\infty$ und $u(t)$ konvergiert für $t \rightarrow +\infty$ monoton gegen u_+ .*
- 2) Sei f auf I_+ positiv. Dann strebt $u(t)$ für $t \rightarrow \bar{t}(u_0)$ monoton gegen $\sup D$.*

b) Sei $f(u_0) < 0$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

- 1) Sei $u_- \in I_-$ eine Nullstelle von f und f sei auf $(u_-, u_0]$ negativ. Dann ist $\bar{t}(u_0) = +\infty$ und $u(t)$ konvergiert für $t \rightarrow +\infty$ monoton gegen u_- .
- 2) Sei f auf I_- negativ. Dann strebt $u(t)$ für $t \rightarrow \bar{t}(u_0)$ monoton gegen $\inf D$.
- c) Für $f(u_0) = 0$ ist u_0 ein Fixpunkt.

Man beachte, dass wir oben wegen des Zwischenwertsatzes alle Möglichkeiten abdecken. In den Aussagen 2) kann $\bar{t}(u_0)$ endlich oder unendlich sein. (Siehe (4.4) bzw. die Gleichung $u' = u$ mit $f(x) = x$, $D = \mathbb{R}$ und den Lösungen $u(t) = e^t u_0$.)

BEWEIS. Sei $f(u_0) > 0$. Zunächst sei $f(u_+) = 0$ für einen Punkt $u_+ \in I_+$ und f positiv auf $[u_0, u_+)$. Wegen Stetigkeit gibt es eine Zahl $a \in I_-$ mit $f > 0$ auf (a, u_+) . Dann ist $u'(t) = f(u(t))$ positiv für alle $t \in [0, \bar{t}(u_0))$ mit $u(t) \in (a, u_+)$. Also wächst u für solche t . Nun ist $v(t) = u_+$ eine stationäre Lösung, und $\gamma_+(u_0)$ ist ein Intervall nach dem Zwischenwertsatz. Da Lösungen sich gemäß Satz 4.15 nicht schneiden können, bleibt also $u(t)$ für alle $t \in [0, \bar{t}(u_0))$ kleiner als u_+ , und ist größer gleich u_0 . Theorem 4.9 impliziert nun $\bar{t}(u_0) = +\infty$. Aufgrund der Monotonie konvergiert somit u für $t \rightarrow +\infty$. Laut Lemma 5.1 ist der Grenzwert eine Nullstelle von f und damit gleich u_+ .

Nun sei f positiv auf I_+ . Nach den obigen Überlegungen wächst dann u für alle $t \in [0, \bar{t}(u_0))$, hat aber wegen Lemma 5.1 keinen Grenzwert in D . Somit strebt u gegen $\sup D$ in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Aussage b) zeigt man genauso, und c) gilt nach Bemerkung 4.16. $\square$

Insbesondere gibt es im autonomen eindimensionalen Fall keine periodischen Orbits. Schon in zwei Dimensionen können sich die Lösungen von (4.1) viel komplexer verhalten, wie das folgende Beispiel belegt. Wegen des Wurzelterms bietet es sich hier an, Polarkoordinaten zu verwenden. (Dieses Verfahren wird in Abschnitt 5.2 von [2], systematischer untersucht.)

BEISPIEL 5.3. Für $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t) - v(t) - u(t)\sqrt{u(t)^2 + v(t)^2}, & t \geq 0, \\ v'(t) &= u(t) + v(t) - v(t)\sqrt{u(t)^2 + v(t)^2}, & t \geq 0, \\ u(0) &= u_0, & v(0) = v_0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Da die rechte Seite eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ definiert, haben wir genau eine maximale Lösung (u, v) . Diese ist gleich 0, wenn $(u_0, v_0) = (0, 0)$ ist. Andernfalls gibt es eine Zeit $t_1 > 0$ und stetig differenzierbare Funktionen $r : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ und $\varphi : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$u(t) = r(t) \cos \varphi(t) \quad \text{und} \quad v(t) = r(t) \sin \varphi(t).$$

Dabei ist $r = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$ und $i\varphi = \log(r^{-1}(u + iv))$ für einen Zweig des Logarithmus, in dessen Definitionsbereich $u_0 + iv_0$ liegt. Wir haben $r(0) = r_0 := (u_0^2 + v_0^2)^{\frac{1}{2}} > 0$

und (5.1) impliziert die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} r' &= \frac{1}{2r} (2uu' + 2vv') = \frac{1}{r} (u^2 - uv - u^2r + vu + v^2 - v^2r) \\ &= r - r^2, \end{aligned}$$

wobei wir die Variable $t \geq 0$ unterdrücken. Nach Beispiel 1.30 in Analysis 2 hat diese Gleichung die Lösung

$$r(t) = \frac{r_0}{r_0 + (1 - r_0)e^{-t}}$$

für $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dabei konvergiert $r(t)$ für $t \rightarrow +\infty$ gegen 1 und es gelten für alle $t \geq 0$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} r(t) &\in (0, 1) \quad \text{für } r_0 \in (0, 1), \\ r(t) &= 1 \quad \text{für } r_0 = 1, \\ r(t) &> 1 \quad \text{für } r_0 > 1. \end{aligned}$$

Dieses Konvergenzverhalten läßt sich auch viel einfacher direkt aus Satz 5.2 gewinnen, da $f(r) = r - r^2$ genau die Nullstellen 0 und 1 besitzt, sowie auf $(0, 1)$ positiv und auf $(1, +\infty)$ negativ ist.

Wir differenzieren weiter $u = r \cos \varphi$ und $v = r \sin \varphi$ nach t und erhalten

$$u' = r' \cos \varphi - r\varphi' \sin \varphi \quad \text{und} \quad v' = r' \sin \varphi + r\varphi' \cos \varphi.$$

Nun multiplizieren wir die erste Gleichung mit $\sin \varphi$ und die zweite mit $-\cos \varphi$. Die Summe ist dann

$$u' \sin \varphi - v' \cos \varphi = r' \cos \varphi \sin \varphi - r\varphi' \sin^2 \varphi - r' \sin \varphi \cos \varphi - r\varphi' \cos^2 \varphi = -r\varphi'.$$

Andererseits impliziert das System (5.1) die Identität

$$\begin{aligned} u' \sin \varphi - v' \cos \varphi &= \sin \varphi (r \cos \varphi - r \sin \varphi - r^2 \cos \varphi) - \cos \varphi (r \cos \varphi + r \sin \varphi - r^2 \sin \varphi) \\ &= -r, \end{aligned}$$

sodass sich $\varphi' = 1$ ergibt. Also gilt $\varphi(t) = \varphi_0 + t$ für alle $t \geq 0$. Dabei wählen wir $\varphi_0 \in [-\pi, \pi)$ derart, dass $(u_0, v_0) = r_0(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$ ist. Also ist die Lösung durch

$$u(t) = r(t) \cos(t + \varphi_0), \quad v(t) = r(t) \sin(t + \varphi_0)$$

für die oben erhaltene Funktion r gegeben. Eine Probe zeigt, dass diese Formel tatsächlich für alle $t \geq 0$ eine Lösung von (5.1) definiert. Auf Grund des Konvergenzverhaltens von r besitzt (5.1) vier Typen von Trajektorien:

- 1) den Fixpunkt $(0, 0)$,
- 2) den periodischen Orbit $\{(\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$,
- 3) Spiralen, die sich positiv von innen gegen $\partial B(0, 1)$ winden, und
- 4) Spiralen, die sich positiv von außen gegen $\partial B(0, 1)$ winden.

Man nennt $\partial B(0, 1)$ *Grenzzyklus*. Die Orbits schneiden sich nach Satz 4.15 nicht. $\diamond$

Der folgende Begriff kann bei der Untersuchung des qualitativen Verhaltens einer Differentialgleichung von großem Nutzen sein, siehe auch Abschnitt 6.3.

DEFINITION 5.4. *Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ lokal Lipschitz. Eine Funktion $H \in C(D_0, \mathbb{R})$ heißt erstes Integral von (4.1), wenn $H(u(t)) = H(u_0)$ für jedes $u_0 \in D$ und alle $t \in J_{\max}(u_0)$ gilt, also wenn der Orbit $\gamma(u_0)$ ganz in der Niveaufläche $N_c = \{x \in D \mid H(x) = H(u_0) =: c\}$ liegt.*

Für ein erstes Integral ist H eine Erhaltungsgröße von (4.1). Erste Integrale entsprechen oft physikalischen Objekten, wie z.B. der Energie. Für die Reaktionsgleichung in Beispiel 4.13 hatten wir das erste Integral $H(a, b, p) = a + b + 3p$ bestimmt, das einer konstanten Gesamtmenge entspricht. Also verlaufen hier alle Lösungen auf der affinen Ebene $a + b + 3p = H(a_0, b_0, p_0)$, sodass eine der Spezies redundant ist. Zum Beispiel ist das Produkt $3p(t) = H(a_0, b_0, p_0) - a(t) - b(t)$ durch die Anfangswerte und die Konzentrationen $a(t)$ und $b(t)$ gegeben.

Oft ist H nur auf einer offenen Menge $D_0 \subseteq D$ definiert. Dann kann f auf D_0 einschränken; was unproblematisch ist, wenn D_0 invariant im Sinne des nächsten Abschnittes ist. Sei $H \in C^1(D, \mathbb{R})$. Soweit $\nabla H(x) \neq 0$ gilt, ist N_c eine C^1 -Hyperfläche mit Normalen $\nabla H(x)$. Also ist $f(x)$ eine Tangentenrichtung an N_c bei x .

Wir geben zuerst eine nützliche Charakterisierung erster Integrale durch f selbst an, falls H stetig differenzierbar ist.

SATZ 5.5. *Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ lokal Lipschitz und $H \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$. Genau dann ist H ein erstes Integral von (4.1), wenn die Gleichung*

$$0 = (\nabla H(x) | f(x)) = \sum_{k=1}^m \partial_k H(x) f_k(x) \quad (5.2)$$

für jedes $x \in D$ gilt.

BEWEIS. Seien $u_0 \in D$ und u die maximale Lösung von (4.1) auf D . Es gelte zuerst (5.2). Dann liefern die Kettenregel, (4.1) und die Voraussetzung die Identität

$$\frac{d}{dt} H(u(t)) = ((\nabla H)(u(t)) | u'(t)) = ((\nabla H)(u(t)) | f(u(t))) = 0$$

für $t \in J_{\max}(u)$. Also ist $H \circ u$ wie behauptet konstant.

Sei nun H ein erstes Integral. Dann folgt ähnlich wie oben

$$0 = \frac{d}{dt} H(u(t)) = ((\nabla H)(u(t)) | f(u(t))).$$

Für $t = 0$ ergibt sich daraus $0 = (\nabla H(u_0) | f(u_0))$ und somit die Behauptung. $\square$

Seien nun $m = 2$ und $H \in C^1(D, \mathbb{R})$ ein erstes Integral von (4.1) mit $\nabla H(x) \neq 0$, sofern $f(x) \neq 0$ ist. Für jede Zahl c im Bild von H ist dann

$$N'_c := N_c \setminus \{x \in D \mid f(x) = 0\}$$

eine disjunkte Vereinigung von C^1 -Kurven, die sich nur in Nullstellen von f berühren können. (Siehe Abschnitt 4.1 in Analysis 3.) Damit liegen die Bahnkurven der

Lösungen von (4.1) im Grunde fest, sodass wir eine Charakterisierung der Orbits wie in Satz 5.2 für $m = 1$ erwarten können. Um dies durchzuführen, müssen wir allerdings die lokale Graphendarstellung von N'_c im Detail verwenden.

Für $u_0 \in D$ mit $H(u_0) = c$ und $f(u_0) \neq 0$ bezeichnen wir mit $N_c(u_0)$ die Kurve in N'_c , die u_0 enthält. Da der Orbit keine Fixpunkte enthält, ist $\gamma(u_0)$ in $N_c(u_0)$ enthalten. Unter den obigen Voraussetzungen zeigen wir nun, dass $N_c(u_0)$ gleich dem Orbit $\gamma(u_0)$ ist. Demnach ist u eine Parametrisierung von $N_c(u_0)$, die dieser Kurve eine Orientierung gibt, und der Vorwärtsorbit von u_0 erfüllt

$$\gamma_+(u_0) = \{x \in N_c(u_0) \mid \exists t \in [0, \bar{t}(u_0)) : x = u(t)\} =: N_c^+(u_0).$$

Wir können für den Beweis etwa annehmen, dass $\partial_2 H(u_0) \neq 0$ ist. Da ferner

$$0 = f_1(u_0)\partial_1 H(u_0) + f_2(u_0)\partial_2 H(u_0)$$

und $f(u_0) \neq 0$ gelten, kann $f_1(u_0)$ nicht verschwinden. Es sei etwa $f_1(u_0) > 0$. Nach Theorem 3.40 über implizit definierte Funktionen in Analysis 2 (und dem Satz von Minimum) existieren solche offene, beschränkte Intervalle $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}$ mit $u_0 \in U_1 \times U_2 =: U \subseteq D$ und eine Funktion $h \in C^1(U_1, \mathbb{R})$ mit $\bar{h}(U_1) \subseteq U_2$, dass

$$N'_c \cap U = N_c(u_0) \cap U = \{(\xi, h(\xi)) \mid \xi \in U_1\} \quad \text{und} \quad f_1(\xi, h(\xi)) \geq \delta > 0$$

für alle $\xi \in U_1$ erfüllt sind. Insbesondere gibt eine Zahl $\xi_0 \in U_1$ mit $u_0 = (\xi_0, h(\xi_0))$.

Weiter bezeichnen wir mit J_0 das maximale Teilintervall von $\mathbb{R}$, das 0 enthält und für das das Orbitstück $\{u(t) \mid t \in J_0\}$ in $U \cap N_c(u_0)$ enthalten ist. Seien etwa $t > s$ aus J_0 . Dann folgt mit (4.1) die Ungleichung

$$u_1(t) - u_1(s) = \int_s^t u'_1(\tau) d\tau = \int_s^t f_1(u(\tau)) d\tau \geq \delta(t - s).$$

Also wächst u_1 strikt auf J_0 , und J_0 ist mit U_1 beschränkt. Wenn $\sup u_1(J_0) < \sup U_1$ wäre, dann lieferte die Monotonie den Grenzwert $u_1(t) \rightarrow v_1$ in U_1 für $t \rightarrow \sup J_0 =: t_*$. Wir können nun

$$v_2 := h(v_1) = \lim_{t \rightarrow t_*} h(u_1(t)) = \lim_{t \rightarrow t_*} u_2(t)$$

setzen. Wegen der Stetigkeit von H liegt der Vektor $v = (v_1, v_2)$ in $N_c(u_0) \cap U$. Somit verläuft die Lösung $\tilde{u}$ von (4.1) mit Anfangsbedingung $\tilde{u}(t_*) = v$ zumindest für ein kleines Zeitintervall in $U \cap N_c(u_0)$. Gemäß Lemma 4.6 löst die aus u und $\tilde{u}$ zusammengesetzte Funktion auch (4.1). Damit ist die Definition von J_0 verletzt, und wir erhalten $\sup u_1(J_0) = \sup U_1$. Genauso behandelt man das Infimum, sodass $u_1(J_0) = U_1$ und damit

$$N_c(u_0) \cap U = \gamma(u_0) \cap U$$

gelten. Nach Abschnitt 4.1 in Analysis 3 können wir $N_c(u_0)$ überlappend mit solchen Mengen U überdecken. Es folgt $\gamma(u_0) \subseteq N_c(u_0)$ und somit die Behauptung $\gamma(u_0) = N_c(u_0)$.

Wir können nun die Trajektorien von (4.1) durch die Lage der Nullstellen von f und die Kompaktheit oder Beschränktheit der Menge $N_c(u_0)$ beschreiben. Die

Orientierung der Lösung wird dabei durch die Richtungen von f festgelegt. Die Zeit t spielt die Rolle des Kurvenparameters von $N_c(u_0)$. In Teil d) kann $\bar{t}(u_0)$ endlich oder unendlich sein.

SATZ 5.6. *Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ lokal Lipschitz, $u_0 \in D$, u die maximale Lösung von (4.1) und (4.2), $H \in C^1(D, \mathbb{R})$ ein erstes Integral von (4.1) mit $\nabla H(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ mit $f(x) \neq 0$ und $c := H(u_0)$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- a) *Wenn $f(u_0) = 0$ ist, dann ist u_0 ein Fixpunkt.*
- b) *Seien $f(u_0) \neq 0$ und $N_c(u_0)$ kompakt. Dann ist $\gamma(u_0) = N_c(u_0)$ periodisch.*
- c) *Seien $f(u_0) \neq 0$, die Nullstellenmenge $\{x \in D \mid f(x) = 0\}$ diskret und $N_c^+(u_0)$ beschränkt mit Abschluss in D , aber nicht kompakt. Dann ist $\bar{t}(u_0) = +\infty$ und $u(t)$ konvergiert für $t \rightarrow +\infty$ gegen einen Fixpunkt $u_* \in D$.*

d) *Seien $f(u_0) \neq 0$ und $N_c^+(u_0)$ unbeschränkt oder $\overline{N_c^+(u_0)} \cap \partial D \neq \emptyset$. Dann gibt es Zeiten $t_n \rightarrow \bar{t}(u_0)^-$ mit $|u(t_n)|_2 \rightarrow +\infty$ oder $\text{dist}(u(t_n), \partial D) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.*

Es gelten analoge Aussagen wie in c) und d) für $t \leq 0$.

BEWEIS. Die Behauptung a) wurde schon in Bemerkung 4.16 gezeigt.

Wenn $N_c(u_0)$ kompakt ist, kann es durch endlich viele überlappende Mengen U wie in der Vorbemerkung überdeckt werden. Deswegen gibt es eine Zeit $t \neq 0$ mit $u(t) = u_0$. Nach Satz 4.15 ist dann $\gamma(u_0)$ periodisch und Aussage b) ist gezeigt.

Unter den Voraussetzungen von c) ist der Vorwärtssorbit $\gamma_+(u_0)$ beschränkt und hat einen positiven Abstand zu ∂D . Also gilt $\bar{t}(u_0) = +\infty$ nach (4.11). Wir verwenden die Menge

$$\omega_+(u_0) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t_n \rightarrow +\infty : u(t_n) \rightarrow x \ (n \rightarrow \infty)\}.$$

Wegen der Voraussetzung ist sie eine Teilmenge von D . Da H auf D stetig ist, liegt $\omega_+(u_0)$ in N_c . Die Vorbemerkung impliziert die Inklusion $\omega_+(u_0) \subseteq f^{-1}(\{0\}) \cap N_c$. Es ist bekannt, dass die Menge $\omega_+(u_0)$ wegzusammenhängend ist, siehe Proposition 8.4.1 in [5] oder den Beweis von Theorem 6.15 unten. Wegen der vorausgesetzten Diskretheit von $f^{-1}(\{0\})$ muss dann $\omega_+(u_0)$ gleich einem Equilibrium $\{u_*\}$ sein. Proposition 8.4.1 in [5] liefert nun Behauptung c).

Die Aussage d) folgt direkt aus der Gleichheit $\gamma_+(u_0) = N_c^+(u_0)$. $\square$

Wie bestimmen nun erste Integrale für zwei typische Beispiele und beschreiben alle (relevanten) Trajektorien. Wir beginnen mit ungedämpften Schwingungen.

BEISPIEL 5.7. Sei $u(t)$ die Auslenkung des Massenpunktes $m > 0$ an einer Feder mit der Rückstellkraft $-F(u(t))$. Das Newtonsche Gesetz lautet dann

$$mu''(t) = -F(u(t)), \quad t \geq 0.$$

Wir setzen $g = -\frac{1}{m}F$ und $f(x, y) = (y, g(x))$. Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz. Dieses System wird durch das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} &= f(u(t), v(t)) = \begin{pmatrix} v(t) \\ -\frac{1}{m}F(u(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ g(u(t)) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \\ u(0) &= u_0, \quad v(0) = v_0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

für $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ beschrieben. Theorem 4.9 liefert die maximale Lösung (u, v) .

Um ein erstes Integral zu erhalten, multiplizieren wir die erste Zeile in (5.3) mit $g(u(t))$ und die zweite mit $v(t)$. Durch Gleichsetzen folgt die Formel

$$u'(t)g(u(t)) = v(t)g(u(t)) = v'(t)v(t)$$

für $t \in J_{\max}(u_0, v_0)$. Wir integrieren diese Funktionen und erhalten mit der Substitutionsregel (für $x = u(s)$ und $y = v(s)$) die Formel

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_0^t g(u(s))u'(s) ds + \int_0^t v(s)v'(s) ds = \frac{1}{m} \int_{u_0}^{u(t)} F(x) dx + \int_{v_0}^{v(t)} y dy \\ &= \frac{1}{m} \int_0^{u(t)} F(x) dx + \frac{1}{2} v(t)^2 - \frac{1}{m} \int_0^{u_0} F(x) dx - \frac{1}{2} v_0^2 \end{aligned}$$

für $t \in J_{\max}(u_0, v_0)$. Also ist

$$H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad H(x, y) = \frac{1}{m} \int_0^x F(s) ds + \frac{1}{2} y^2,$$

ein erstes Integral von (5.3). Physikalisch ist es die Summe aus potentieller und kinetischer Energie (bis auf einen Faktor m). Im linearen Falle einer Hooke'schen Feder gilt $F(x) = \kappa x$ für eine Konstante $\kappa > 0$ und damit $H(x, y) = \frac{\kappa}{2m} x^2 + \frac{1}{2} y^2$.

Das Fadenpendel aus Beispiel 4.11 kann man genauso behandeln, wobei $\frac{1}{m}F(x) = \frac{\gamma}{\ell} \sin x$ gilt und $u(t)$ ein Winkel ist. Es ergibt sich

$$H(x, y) = \frac{\gamma}{\ell} (1 - \cos x) + \frac{1}{2} y^2 \geq 0 \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Wir erhalten hier $\nabla H(x, y) = (\frac{\gamma}{\ell} \sin x, y)$. Die Funktionen f und ∇H haben genau die Nullstellen $(k\pi, 0)$ für $k \in \mathbb{Z}$, die die Equilibria der Gleichung sind. Ferner ist $0 = H(2k\pi, 0)$ das (lokal strikte) Minimum von H und $2k\pi$ sind alle Minimalstellen. Wir wissen schon aus Beispiel 4.11, dass alle Lösungen global sind.

Um die Niveaulinien von H für das Fadenpendel zu bestimmen, setzen wir $c := H(u_0, v_0)$ und lösen $c = H(x, y)$, was äquivalent zur Gleichung

$$y^2 = 2c - 2\gamma(1 - \cos x)/\ell \quad (5.4)$$

ist. Wenn man berücksichtigt, dass die rechte Seite nichtnegativ sein muss, erhält man vier Fälle für c und fünf Orbits.

1) Sei $c = 0$. Es folgt $\cos x = 1$, und somit ist $(x, y) = (2k\pi, 0) = (u_0, v_0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ein Fixpunkt. Er entspricht einem nach unten hängenden Pendel. (Diese Ruhelage ist 'stabil'.)

2) Sei $c \in (0, 2\gamma/\ell)$. Daraus folgt $1 - c\ell/\gamma \in (-1, 1)$. Deswegen gilt $2c - 2\gamma(1 - \cos x)/\ell \geq 0$ genau für $x \in [2\pi k - x_c, 2\pi k + x_c] =: J_k$ mit $x_c = \arccos(1 - c\ell/\gamma) \in (0, \pi)$ und $k \in \mathbb{Z}$. Wegen (5.4) ist also die Niveaulinie N_c durch die zwei Graphen

$$y(x) = \pm \sqrt{2c - 2\gamma(1 - \cos x)/\ell}, \quad x \in J_k,$$

gegeben. Da die beiden Zweige bei $(2\pi k - x_c, 0)$ bzw. $(2\pi k + x_c, 0)$ zusammen stoßen, besteht N_c aus einer Folge disjunkter, geschlossener und einfacher Kurven, die jeweils symmetrisch zur x -Achse und der Geraden $y = 2\pi k$ sind. Auf diesen kompakten Teilkurven liegt keine Nullstelle von f , sodass nach Satz 5.6 für $H(u_0, v_0) = c \in (0, 2\gamma/\ell)$ der Orbit (u, v) periodisch ist und eine gewöhnliche Pendelbewegung beschreibt.

3) Sei $c = 2\gamma/\ell$. Dann besteht die Niveaulinie zum einen aus den Fixpunkten $(u_0, v_0) = ((2k + 1)\pi, 0)$ für $k \in \mathbb{Z}$, die dem nach oben stehenden Pendel (einer ‘instabilen’ Ruhelage) entsprechen. Für $x \in (2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi) = J'_k$ kann man (5.4) zu

$$y(x) = \pm \sqrt{2\gamma(1 + \cos x)/\ell}, \quad x \in J'_k, \quad (5.5)$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$ auflösen. Die beiden Zweige schneiden sich nicht und berühren sich in den instabilen Equilibria. Nach Satz 5.6 konvergieren diese Lösungen für $t \rightarrow +\infty$ bzw. $t \rightarrow -\infty$ gegen je einen der beiden Fixpunkte $(2k\pi \pm \pi, 0)$. Solche Orbits nennt man *heteroklin.* (Trajektorien, die einen Fixpunkt mit sich selbst verbinden, heißen *homoklin.*)

4) Sei $c > 2\gamma/\ell$. Dann ist $2c - 2\gamma(1 - \cos x)/\ell$ für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv. Damit besteht N_c aus den beiden unbeschränkten Kurven

$$y(x) = \pm \sqrt{2c - 2\gamma(1 - \cos x)/\ell}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Für $H(u_0, v_0) > 2\gamma/\ell$ haben wir folglich (globale) unbeschränkte Lösungen auf einer dieser Kurven. Diese Lösungen beschreiben ein sich überschlagendes Pendel.

Die Energie des Anfangswerts legt also fest, auf welchen Kurventyp die Lösung verläuft (mit dem Sonderfall des instabilen Fixpunktes in Fall 3), und (u_0, v_0) den genauen Startpunkt. Da $f_1(u(t), v(t)) = v(t)$ ist, streben die Lösungen in der oberen Halbebene nach rechts, und in der unteren nach links. Also konvergieren die heteroklinen Orbits aus (5.5) für $t \rightarrow \pm\infty$ gegen $(2k\pi \pm \pi, 0)$, wenn $v_0 > 0$ ist, sowie gegen $(2k\pi \mp \pi, 0)$ im Falle $v_0 < 0$. Dabei ist t der Kurvenparameter, den man in der (u, v) -Ebene nur ‘sehen’ kann, wenn man sich die Punkte $(u(t), v(t))$ in Bewegung denkt. $\diamond$

Als nächstes besprechen wir das ursprüngliche Räuber-Beute Modell von Volterra und Lotka (1926), in dem die Beutespezies ohne Räuber exponentiell wachsen würde.

BEISPIEL 5.8. Es sei u die Größe der Beutepopulation mit ungedämpften Wachstum und v die Größe der Räuberspezies, die sich nur von dieser Beute ernährt. Für

Konstanten $a, c, r, s > 0$ erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} u'(t) &= au(t) - ru(t)v(t), & t \geq 0, \\ v'(t) &= -cv(t) + su(t)v(t), & t \geq 0, \\ u(0) &= u_0 \geq 0, & v(0) = v_0 \geq 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Nach Beispiel 4.13 gibt es genau eine nichtnegative Lösung für alle $t \geq 0$. Die Differentialgleichungen in (5.6) haben den Fixpunkt $(0, 0)$ und auf den beiden positiven Halbachsen die Lösungen $(e^{at}u_0, 0)$ und $(0, e^{-ct}v_0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $u_0 > 0$ bzw. $v_0 > 0$. Also besteht $\partial\mathbb{R}_+^2$ aus Orbits. Da Lösungen stetig sind und sich nach Satz 4.15 nicht schneiden, kann keine Trajektorie aus $\mathbb{R}_+^2$ herauslaufen. Sei nun $(u_0, v_0) > 0$. Da die Lösung positiv bleibt, können wir (5.6) auf $D = \mathbb{R}_+^2$ einschränken.

Man kann ein erstes Integral wie im vorherigen Beispiel berechnen. Wir verwenden hier aber eine etwas andere Technik (siehe Abschnitt 5.1 von [2] für den theoretischen Hintergrund). Aus (5.6) bilden wir den Quotienten

$$\begin{aligned} \frac{u'(t)}{v'(t)} &= \frac{a - rv(t)}{v(t)} \frac{u(t)}{su(t) - c}, \\ u'(t) \frac{su(t) - c}{u(t)} &= v'(t) \frac{a - rv(t)}{v(t)} \end{aligned}$$

für $t \geq 0$, wobei wir in der ersten Zeile eventuelle Nullen im Nenner ignorieren. Integration und Substitution liefern nun

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \frac{su(\tau) - c}{u(\tau)} u'(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{rv(\tau) - a}{v(\tau)} v'(\tau) d\tau \\ &= \int_{u_0}^{u(t)} \left(s - \frac{c}{x} \right) dx + \int_{v_0}^{v(t)} \left(r - \frac{a}{y} \right) dy = [sx - c \ln x]_{u_0}^{u(t)} + [ry - a \ln y]_{v_0}^{v(t)}. \end{aligned}$$

Also hat dieses System das erste Integral

$$H : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) = sx - c \ln x + ry - a \ln y.$$

(Probe mit Satz 5.5!) Wir untersuchen diese Funktion. Es gelten

$$\nabla H(x, y) = \begin{pmatrix} s - cx^{-1} \\ r - ay^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D^2 H(x, y) = \begin{pmatrix} cx^{-2} & 0 \\ 0 & ay^{-2} \end{pmatrix}$$

für $x, y > 0$. Somit ist

$$(u_*, v_*) = \left(\frac{c}{s}, \frac{a}{r} \right) > 0$$

die einzige Nullstelle von ∇H und die Hessematrix $D^2 H$ ist auf $\mathbb{R}_+^2$ positiv definit. Weiter konvergiert $H(x, y) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow 0$ oder $y \rightarrow +\infty$. Also nimmt die Funktion H bei (u_*, v_*) ihr globales und striktes Minimum

$$\kappa_* := c - c \ln(c/s) + a - a \ln(a/r)$$

an; d.h., es gilt $H(x, y) > \kappa_*$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(u_*, v_*)\}$. Man sieht leicht ein, dass (u_*, v_*) die einzige Nullstelle von

$$f(x, y) = (ax - rxy, -cy + sxy)$$

in $\mathbb{R}_+^2$ ist; sie heißt *Koexistenzequilibrium*.

Sei $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(u_*, v_*)\}$. Dann ist $\kappa := H(u_0, v_0) > \kappa_*$ und auf der Niveaulinie N_κ liegt kein Fixpunkt. Um diese zu bestimmen, lösen wir die Gleichung $H(x, y) = \kappa$ und damit

$$\psi(y) := ry - a \ln y = \kappa - sx + c \ln x =: \varphi_\kappa(x) \quad (5.7)$$

für $x, y > 0$ nach y auf. Wir müssen dafür die Funktion $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ umkehren. Dazu bemerken wir, dass $\psi(y)$ für $y \rightarrow 0$ oder $y \rightarrow +\infty$ nach $+\infty$ strebt. Weiter gilt $\psi'(y) = r - a/y$, sodass ψ auf $(0, a/r)$ strikt fällt, auf $(a/r, +\infty)$ strikt wächst und bei a/r das strikte, globale Minimum

$$\psi(a/r) = a - a \ln(a/r) =: z_0$$

besitzt. Somit ist $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [z_0, +\infty)$ surjektiv und besitzt die zwei bijektiven Linksinversen

$$h_- : [z_0, +\infty) \rightarrow (0, a/r] \quad \text{und} \quad h_+ : [z_0, +\infty) \rightarrow [a/r, +\infty)$$

mit $h_-(z_0) = a/r = h_+(z_0)$. Entsprechend zeigt man, dass die Abbildung $\varphi_\kappa : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ auf $(0, c/s]$ strikt wächst, auf $[c/s, +\infty)$ strikt fällt, das strikte globale Maximum

$$\varphi_\kappa(c/s) = \kappa - c + c \ln(c/s) > \kappa_* - c + c \ln(c/s) = z_0$$

hat und gegen $-\infty$ für $x \rightarrow 0$ oder $x \rightarrow +\infty$ strebt. Somit existieren genau zwei Zahlen $0 < x_1 < c/s < x_2$ mit $[x_1, x_2] = \varphi_\kappa^{-1}([z_0, +\infty))$ und $\varphi_\kappa(x_j) = z_0$. Insgesamt besitzt die Gleichung (5.7) die Lösungsmenge

$$N_\kappa = \{(x, y) \mid x \in [x_1, x_2], y = h_\pm(\varphi_\kappa(x))\}.$$

Da $h_+(\varphi_\kappa(x_j)) = h_-(\varphi_\kappa(x_j)) = a/r$ für $j \in \{1, 2\}$ gilt, stoßen die Enden der beiden Zweige von N_κ zusammen und diese Menge ist eine geschlossene einfache Kurve.

Gemäß Satz 5.6 hat (5.6) in $\mathbb{R}_+^2$ neben (u_*, v_*) nur periodische Orbits. Der Wert $H(u_0, v_0)$ legt schon fest, auf welcher Niveaulinie die Lösung liegt, und (u_0, v_0) ist der Startpunkt. Für $x, y > 0$ gelten weiter

$$f_1(x, y) \geq 0 \quad \text{für} \quad y \leq a/r \quad \text{und} \quad f_2(x, y) \geq 0 \quad \text{für} \quad x \geq c/s.$$

Folglich verlaufen die Lösungen auf ihrer Niveaulinie im Gegenuhrzeigersinn.

Sei $T > 0$ die Periodendauer von (u, v) . Wir diskutieren noch die mittlere Speizesgrößen

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad \text{und} \quad \bar{v} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt$$

mit einem ähnlichen Trick wie oben. Wir können die erste Gleichung in (5.6) mit $1/(Tu(t))$ malnehmen (weil u positiv ist) und dann über t integrieren. Es folgt

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{u'(t)}{u(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T (a - rv(t)) dt = a - r\bar{v}.$$

Mit der Substitution $x = u(t)$ wird die linke Seite zu

$$\frac{1}{T} \int_{u_0}^{u(T)} \frac{dx}{x} = 0,$$

da $u(T) = u_0$. Analog verwenden wir die zweite Gleichung und erhalten insgesamt

$$\bar{v} = \frac{a}{r} = v_* \quad \text{und} \quad \bar{u} = \frac{c}{s} = u_*.$$

Also sind die mittleren Anzahlen unabhängig vom Orbit!

Wir nehmen nun an, die Parameter a und c berücksichtigen auch den Effekt einer Bejagung beider Spezies, wobei r und s davon nicht betroffen sein sollen. Wenn diese reduziert wird, ändert sich a zu $a^\sharp > a$ und c zu $0 < c^\sharp < c$. Also gelten für die neuen mittleren Größen $\bar{v}^\sharp > \bar{v}$ und $\bar{u}^\sharp < \bar{u}$. Also sollte bei reduzierter Jagd (oder Fischfang) der Anteil der Räuber im Fang ansteigen. Dies wurde wohl in Italien während des Ersten Weltkrieges beobachtet, als im Mittelmeer weniger gefischt wurde. Dies war der Ausgangspunkt für Volterras Untersuchungen. $\diamond$

5.2. Invariante Mengen

Seien $f \in C(J \times D, \mathbb{R}^m)$ lokal Lipschitz und $t_0 < \sup J$. Wir wollen in diesem Abschnitt eine Bedingung an f und D finden, die die folgende Eigenschaft impliziert.

DEFINITION 5.9. *Sei $M \subseteq D$. Die Menge M heißt positiv invariant für (4.1), wenn für jedes $u_0 \in M$ alle Lösungszustände $u(t)$ von (4.1) und (4.2) für $t \in [t_0, \bar{t}(u_0))$ in M liegen. (Negative Invarianz definiert man ähnlich.)*

Wir hatten in Satz 4.12 die positive Invarianz von $M = \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ aus der Bedingung

$$\forall t \in J, x \in \partial \mathbb{R}_{\geq 0}^m \text{ mit } x_k = 0 : \quad 0 \geq -f_k(t, x) = (f(t, x) | -e_k) = (f(x) | \nu(x))$$

erhalten, wobei $-e_k = \nu(x)$ eine äußere Normale an $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ bei x ist. Man beachte, dass der Kosinus des Winkels zweier nichttrivialer Vektoren v und w durch $(v|w)/|v|_2 |w|_2$ gegeben ist. Somit bedeutet die obige Bedingung gerade, dass der Winkel zwischen $f(x)$ und $\nu(x)$ im Betrag größer gleich $\pi/2$ ist. Mit anderen Worten, weist $f(t, x)$ bei jedem $x \in \partial \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ nicht aus $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ heraus. Aus dieser Eigenschaft wollen wir unten die Invarianz recht allgemeiner M schließen.

Dafür benötigen wir als Hilfsmittel die (untere rechtsseitige) *Dini-Ableitung*. Für eine Funktion $\varphi \in C(J_0, \mathbb{R})$ und $t \in J_0 \setminus \{\max J_0\}$ definiert man sie durch

$$D_+ \varphi(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (\varphi(t+h) - \varphi(t)) \in [-\infty, +\infty].$$

Für differenzierbare φ gilt natürlich $\varphi' = D_+ \varphi$.

Wir verwenden im Beweis von Theorem 5.14 das folgende *Vergleichsprinzip*. Unten sehen wir, wie man mit Hilfe dieses Lemmas das globale Existenzkriterium aus Satz 4.10 verfeinern kann. (Siehe auch die Übungen.)

LEMMA 5.10. Seien $m = 1$, $f \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ lokal Lipschitz in x , $u_0 \in \mathbb{R}$, $[t_0, b) \subseteq J$ und $\varphi \in C([t_0, b), \mathbb{R})$ erfülle

$$D_+\varphi(t) \leq f(t, \varphi(t)), \quad t \in [t_0, b), \quad \varphi(t_0) \leq u_0.$$

Sei u die maximale Lösung von (4.1) und (4.2). Dann gilt $\varphi(t) \leq u(t)$ für alle $t \in [t_0, \min\{b, \bar{t}(u_0)\})$.

BEWEIS. Wir wollen per Widerspruch argumentieren. Dazu müssen wir (so wie im Beweis von Satz 4.12) zunächst den Anfangswert und die Funktion f etwas modifizieren. Sei dazu $T \in (t_0, \min\{b, \bar{t}(u_0)\})$. Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ haben wir eine maximale Lösung u_n des Problems

$$u'_n(t) = f(t, u_n(t)) + \frac{1}{n}, \quad t \geq t_0; \quad u_n(t_0) = u_0 + \frac{1}{n}. \quad (5.8)$$

Nach Theorem 4.9 gibt es so einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, dass u_n auf $[t_0, T]$ für alle $n \geq n_0$ existiert, und $(u_n(t))_n$ gegen $u(t)$ für jedes $t \in [t_0, T]$ konvergiert. Wir zeigen, dass $u_n(t) \geq \varphi(t)$ für alle $t \in [t_0, T]$ und $n \geq n_0$ ist. Dann gilt im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ auch $u(t) \geq \varphi(t)$ für alle $t \in [t_0, T]$, und das Lemma ist gezeigt (weil $T \in (t_0, \min\{b, \bar{t}(u_0)\})$ beliebig ist).

Wir nehmen an, diese Behauptung wäre falsch. Dann gäbe es einen Index $N \geq n_0$ und Zeiten $t_1 < t_2$ in $(t_0, T]$ mit $\varphi(t_1) = u_N(t_1)$ und $\varphi(t) > u_N(t)$ für alle $t \in (t_1, t_2]$. (Hier verwenden wir die strikte Ungleichung $u_N(t_0) > \varphi(t_0)$ und die Stetigkeit von φ und u_N .) Sei (h_k) eine Nullfolge in $(0, t_2 - t_1)$, für die der Limes Inferior in der Dini-Ableitung $D_+\varphi(t_1)$ angenommen wird. Die obigen Eigenschaften implizieren die Abschätzung

$$\frac{1}{h_k} (\varphi(t_1 + h_k) - \varphi(t_1)) > \frac{1}{h_k} (u_N(t_1 + h_k) - u_N(t_1))$$

für alle k . Im Grenzwert $k \rightarrow \infty$ folgt nun mit der Voraussetzung und (5.8) der Widerspruch

$$f(t_1, \varphi(t_1)) \geq D_+\varphi(t_1) \geq u'_N(t_1) = f(t_1, u_N(t_1)) + \frac{1}{N} = f(t_1, \varphi(t_1)) + \frac{1}{N}.$$

Also gilt das Lemma. $\square$

BEISPIEL 5.11. Wir nehmen an, dass $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ lokal Lipschitz ist. Sei $u_0 \in \mathbb{R}^m$, und die maximale Lösung u von (4.1) und (4.2) erfülle

$$\frac{d}{dt}|u(t)|_2^2 = 2(f(u(t))|u(t)) \leq c(|u(t)|_2^2 + e) \ln(|u(t)|_2^2 + e)$$

für eine Konstante $c > 0$ und alle $t \in [0, \bar{t}(u_0))$. Die Funktionen $\varphi := |u|_2^2 : [0, \bar{t}(u_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$; $g(r) = c(r + e) \ln(r + e)$, sind stetig differenzierbar. Wir setzen g (irgendwie) zu einer Funktion in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ fort, um Lemma 5.10 anwenden zu können. Es gelten $\varphi' \leq g(\varphi)$ und $\varphi \geq 0$.

Sei ψ die maximale Lösung von $\psi'(t) = g(\psi(t))$ mit $\psi(0) = |u_0|_2^2 = \varphi(0)$. Setze $t_+ = \min\{\bar{t}(u_0), \bar{t}^g(\psi(0))\}$ und $J_+ = [0, t_+)$. Lemma 5.10 impliziert $0 \leq \varphi(t) \leq \psi(t)$ für $t \in J_+$. Wir zeigen gleich $\bar{t}^g(\psi(0)) = +\infty$, sodass φ im Falle eines endlichen $\bar{t}(u_0)$ beschränkt bliebe, was dem blow-up Kriterium (4.11) in Picard–Lindelöf widerspräche. Daraus ergibt sich $\bar{t}(u_0) = +\infty$.

Um $\bar{t}^g(\psi(0)) = +\infty$ zu zeigen, behandeln wir statt ψ die größere Funktion $\tilde{\psi} := \psi + e \geq e$. Diese löst

$$\tilde{\psi}'(t) = \psi'(t) = g(\psi(t)) = \tilde{g}(\tilde{\psi}(t)), \quad t \geq 0, \quad \tilde{\psi}(0) = |u_0|_2^2 + e, \quad (5.9)$$

für die verschobenen Nichtlinearität $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $\tilde{g}(\tau) = g(\tau - e)$. Wir haben $\tilde{g}(\tau) = c\tau \ln \tau$ für $\tau \geq 0$. Wieder mit (4.11) folgt aus der globalen Existenz von $\tilde{\psi}$ die gewünschte von ψ . Wir lösen (5.9) mittels der Trennung der Variablen. Sei $t \in [0, \bar{t}^g(\tilde{\psi}(0)))$. Dann folgt mit den Substitutionen $x = \tilde{\psi}(s)$ und $y = \ln x$

$$t = \int_0^t 1 \, ds = \int_0^t \frac{\tilde{\psi}'(s)}{\tilde{g}(\tilde{\psi}(s))} \, ds = \int_{\tilde{\psi}(0)}^{\tilde{\psi}(t)} \frac{dx}{cx \ln(x)} = \int_{\ln \tilde{\psi}(0)}^{\ln \tilde{\psi}(t)} \frac{x \, dy}{cx \ln e^y} = \frac{1}{c} \ln y \Big|_{\ln \tilde{\psi}(0)}^{\ln \tilde{\psi}(t)},$$

$$\ln \ln \tilde{\psi}(t) = ct + \ln \ln \tilde{\psi}(0) =: ct + c_0.$$

Daraus folgen $\tilde{\psi}(t) = \exp(\exp(ct + c_0))$ und $\bar{t}^g(\tilde{\psi}(0)) = +\infty$.

Man kann den Beweis für $\ln^\alpha$ mit $\alpha > 0$ statt $\ln$ modifizieren. Für $\alpha < 1$ erhalten wir wieder globale Existenz, im Falle $\alpha > 1$ gilt jedoch $\bar{t}^g(\tilde{\psi}(0)) < +\infty$. $\diamond$

Wir formulieren nun das Normalenkonzept, welches zum Beweis des folgenden Theorems passt.

DEFINITION 5.12. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen. Eine äußere Normale an ∂M bei $y \in \partial M$ ist ein Vektor $\nu \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ mit

$$B(y + \nu, |\nu|_2) \cap M = \emptyset.$$

Wir schreiben dann $\nu \in N_M(y)$.

Äußere Normalen existieren nicht immer (etwa an einer einspringenden Ecke) und sind nicht immer eindeutig bestimmt (etwa an einer nach außen weisenden Ecke), wie man sich mit Skizzen klarmachen kann. Wir geben nun die beiden wichtigsten Spezialfälle an.

BEMERKUNG 5.13. a) Sei $\partial M \in C^2$ (siehe Definition 4.18 aus Analysis 3) und n der äußere Normalenvektor an $y_0 \in \partial M$ wie in Bemerkung 4.19 aus Analysis 3. Dann ist αn für genügend kleine $\alpha > 0$ eine äußere Normale bei y_0 im Sinne von Definition 5.12.

BEWEIS. Sei $y_0 \in \partial M$. Wir haben den äußeren Normalenvektor n an ∂M im Sinne von Bemerkung 4.19 aus Analysis 3. Er ist gleich $\nabla g(y_0)$, wenn ∂M lokal die Nullstellenmenge von g ist und M° lokal durch $g < 0$ beschrieben wird. Sei Q eine orthogonale Matrix Q , die n auf e_m abbildet. Wir verwenden die neuen

Koordinaten $\tilde{y} = \Phi(y) = Q(y - y_0)$ und $\tilde{g} = g \circ \Phi^{-1}$. Dadurch wird y_0 auf 0 und n auf $\nabla \tilde{g}(0) = ((g \circ \Phi^{-1})')^\top(0) = (Q^{-1})^\top \nabla g(y_0) = Qn = e_m$.

Wie in Bemerkung 4.3 in Analysis 3 erhalten wir Radien $r' > r > 0$, $U_1 = B(0, r) \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$, ein offenes $U_2 \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in U := U_1 \times U_2$ und eine Funktion $h \in C^2(B(0, r'), \mathbb{R})$ mit $h(U_1) \subseteq U_2$, $\nabla h(0) = 0$ und

$$\partial M \cap U = \{(x, s) \in U \mid s = h(x)\}, \quad M^\circ \cap U = \{(x, s) \in U \mid s < h(x)\}.$$

(Wir lassen die Tilden wieder weg, da die Transformation Φ an der Aussage nichts ändert.) Hier ist $g(x, s) = s - h(x)$ und $(-\nabla h(x), 1)$ die äußere Normale, die bei $y_0 = 0$ gleich e_m ist

Sei $\nu = \alpha e_m$ für ein $\alpha > 0$. Genau dann liegt ein Punkt $y = (x, s) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ in $B(\nu, |\nu|_2)$, wenn $|y - \nu|_2^2 = |x|_2^2 + (\alpha - s)^2 < \alpha^2 = |\nu|_2^2$ ist. Daraus folgen $|x|_2 < \alpha$ und

$$s > \alpha - \sqrt{\alpha^2 - |x|_2^2} = \alpha \left(1 - \sqrt{1 - \alpha^{-2} |x|_2^2}\right) \geq \alpha \left(1 - \left(1 - \frac{|x|_2^2}{2\alpha^2}\right)\right) = \frac{|x|_2^2}{2\alpha},$$

wobei die Ungleichung $\sqrt{1 - a} \leq 1 - a/2$ für $a \in [0, 1]$ einging. Seien andererseits $c := \max_{|\xi|_2 \leq r} \|h''(\xi)\|$, $\alpha \leq \min\{r, 1/c\}$ und $x \in B(0, \alpha)$. Wegen $h(0) = 0$ und $\nabla h(0) = 0$ liefert der Satz von Taylor 3.27 aus Analysis 2 dann die Ungleichung

$$h(x) \leq \frac{|x|_2^2}{2} \max_{|\xi|_2 \leq r} \|h''(\xi)\| \leq \frac{|x|_2^2}{2\alpha} < s.$$

Somit ist der Schnitt von $B(\nu, |\nu|_2)$ mit M leer, falls $\alpha \leq \min\{r, 1/c\}$ ist. $\square$

b) Konvexe abgeschlossene Mengen M haben an allen $y \in \partial M$ äußere Normalen, siehe Lemma 7.3.1 und Bemerkung 7.3.2 in [5]. Dort wird insbesondere bewiesen, dass für jedes $x \notin M$ genau ein ‘Lotfußpunkt’ $y \in \partial M$ mit minimalen Abstand zu x existiert und $x - y$ eine äußere Normale bei y ist. $\diamond$

Nun formulieren wir das angekündigte Invarianzkriterium, das man gemäß der obigen Bemerkung etwa für konvexe M oder solche mit C^2 -Rand anwenden kann.

THEOREM 5.14. *Seien $f \in C(J \times D, \mathbb{R}^m)$ lokal Lipschitz in x , $t_0 \in J \setminus \{\sup J\}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen mit $M \subseteq D$. Jeder Punkt $y \in \partial M$ besitze eine äußere Normale. Es gelte die Invarianzbedingung*

$$\forall y \in \partial M, \nu \in N_M(y), t \in J: \quad (f(t, y)|\nu) \leq 0. \quad (5.10)$$

Dann ist M für (4.1) positiv invariant.

BEWEIS. 1) Wir nehmen an, die Aussage wäre falsch. Dann gäbe es einen Anfangszustand $u_0 \in M$ und eine Zeit $t'_2 \in (t_0, \bar{t}(u_0))$ mit $u(t'_2) \in D \setminus M$. Da $u^{-1}(M)$ abgeschlossen und $u^{-1}(D \setminus M)$ offen sind, erhalten wir so eine Zahl $t_1 \in [t_0, t'_2)$, dass die maximale Lösung u für t_1 in M liegt und für alle $t \in (t_1, t'_2]$ außerhalb. Um einen Widerspruch zu bekommen, wollen wir die Voraussetzung (5.10) in einer ‘Energieabschätzung’ wie im Beweis von Satz 4.10 verwenden. Dazu setzen wir

$$\rho(t) = \text{dist}(u(t), M) = \inf_{x \in M} |u(t) - x|_2.$$

für $t \in [t_0, \bar{t}(u_0))$. Nach Korollar 2.52 in Analysis 2 ist $\rho : [t_0, \bar{t}(u_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, verschwindet bei t_1 und ist positiv auf $(t_1, t'_2]$, weil M abgeschlossen ist. Sei ferner $r(t) = \max_{s \in [t_1, t]} \rho(s)$ für $t \geq t_1$. Da $r(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow t_1$, gibt es ein $t_2 \in (t_1, t'_2]$ mit

$$r(t_2) < \text{dist}(u([t_1, t'_2]), \partial D) = \inf_{t \in [t_1, t'_2], y \in \partial D} |u(t) - y|_2.$$

Folglich liegt die kompakte Menge $K := \bigcup_{t \in [t_1, t_2]} \overline{B}(u(t), r(t_2))$ in D . Weiter ist f nach Lemma 4.3 auf $[t_1, t_2] \times K$ Lipschitz in x mit einer Konstanten $L \geq 0$.

2) Da ρ im allgemeinen nicht differenzierbar ist, suchen wir eine glatte Variante. Sei dazu $\tau \in (t_1, t_2]$ (zunächst) fest gewählt. Es gibt Vektoren $y_n \in M$ mit $|u(\tau) - y_n|_2 \rightarrow \rho(\tau)$ für $n \rightarrow \infty$. Da die Folge (y_n) beschränkt ist, hat sie einen Häufungspunkt $y_\tau \in M$ mit $|u(\tau) - y_\tau|_2 = \rho(\tau)$. Insbesondere ist y_τ in K enthalten. Weiter liegen die Punkte $su(\tau) + (1-s)y_\tau$ für $s \in (0, 1]$ nicht in M (weil ihr Abstand zu $u(\tau)$ kleiner als $\rho(\tau)$ ist) und sie streben für $s \rightarrow 0$ gegen y_τ . Somit gehört y_τ zu ∂M . Sei $\nu := u(\tau) - y_\tau$. Dann ist $y_\tau + \nu = u(\tau)$ und ein Vektor x mit $|x - u(\tau)|_2 < |\nu|_2 = \rho(\tau)$ liegt nicht in M . Also ist $u(\tau) - y_\tau$ eine äußere Normale von M an y_τ . Wir setzen schließlich

$$\sigma : [t_0, \bar{t}(u_0)) \rightarrow \mathbb{R}; \quad \sigma(t) = |u(t) - y_\tau|_2.$$

Diese Funktion ist stetig differenzierbar bei $t \in (t_1, t_2]$, da dann $u(t)$ kein Element von M und demnach ungleich y_τ ist. Weiter gelten $\rho(\tau) = \sigma(\tau) > 0$ und $\rho \leq \sigma$.

3) Diese Eigenschaften liefern die zentrale Ungleichung

$$\frac{1}{h} (\rho(\tau + h) - \rho(\tau)) \leq \frac{1}{h} (\sigma(\tau + h) - \sigma(\tau))$$

für $h > 0$. Im Grenzwert $h \rightarrow 0$ erhalten wir daraus $D_+\rho(\tau) \leq \sigma'(\tau)$. Um σ' gegen ρ abzuschätzen, differenzieren wir $\sigma(t)^2$ (statt $|u(t)|_2^2$ wie in Satz 4.10) und folgern mit der Kettenregel und (4.1) die Identität

$$\sigma'(t)\sigma(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sigma(t)^2 = (u(t) - y_\tau | u'(t)) = (u(t) - y_\tau | f(t, u(t))).$$

für $t \in (t_1, t_2]$. Die Voraussetzung (5.10) und die Lipschitzeigenschaft von f implizieren nun für $t = \tau$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sigma'(\tau)\sigma(\tau) &\leq (u(\tau) - y_\tau | f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, y_\tau)) \leq L |u(\tau) - y_\tau|_2^2 = L\rho(\tau)\sigma(\tau), \\ \sigma'(\tau) &\leq L\rho(\tau). \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir $D_+\rho(\tau) \leq L\rho(\tau)$ gezeigt. Hier können wir jetzt τ durch jedes $t \in (t_1, t_2]$ ersetzen. Aus Lemma 5.10 mit $f(t, s) = Ls$ und $\rho(t_1) = 0$ schließen wir $\rho = 0$ auf $[t_1, t_2]$, was ein Widerspruch ist. $\square$

Es gibt eine Variante des obigen Satzes, in der die Invarianz beliebiger abgeschlossener Mengen M mit einer unhandlicheren Bedingung sogar charakterisiert wird, siehe Satz 7.1.4 in [5]. Für konvexe M sind diese Bedingung und (5.10) äquivalent,

siehe Lemma 7.3.3 in [5]. Wir diskutieren ein typisches Beispiel, das biochemische Oszillationen umfasst.

BEISPIEL 5.15. Für Konstanten $\alpha, \beta, \mu > 0$ betrachten wir das System

$$\begin{aligned} u'(t) &= \alpha - g(u(t), v(t)), & t \geq 0, \\ v'(t) &= \beta - \mu v(t) + g(u(t), v(t)), & t \geq 0, \\ u(0) &= u_0 \geq 0, & v(0) = v_0 \geq 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Wir bezeichnen die rechte Seite der Differentialgleichungen mit f . Dabei sei $D \supseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ offen und $g \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$ erfülle

$$\begin{aligned} \forall x, y > 0: \quad & \partial_1 g(x, y) > 0, \quad \partial_2 g(x, y) > 0, \\ \forall x, y \geq 0: \quad & g(0, y) \leq 0, \quad g(x, 0) \geq 0, \\ \forall y > 0: \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} g(x, y) > \alpha. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ein Beispiel dafür ist das reduzierte ATP-ADP System, bei dem

$$g(u, v) = \frac{c_1 uv^2}{c_2 + v^2 + c_3 uv^2}$$

für gegebene Konstanten $c_j > 0$ gilt, vergleiche Abschnitt 36 in [6]. Hierbei nehmen wir an, dass die Zufuhrkonstante α kleiner als c_1/c_3 ist.

In (5.11) haben wir nach Theorem 4.9 eine eindeutige maximale Lösung (u, v) . Für $x, y \geq 0$ gelten weiter

$$f_1(0, y) = \alpha - g(0, y) > 0 \quad f_2(x, 0) = \beta + g(x, 0) > 0,$$

sodass die Lösung laut Satz 4.12 nichtnegativ bleibt. Seien weiter $u_0 = 0$ und $v_0 \geq 0$. Auf Grund der abgesetzten Ungleichung für f_1 gilt dann

$$u(t) = \int_0^t u'(s) ds = \int_0^t f_1(u(s), v(s)) ds > 0$$

für kleine $t \geq 0$, und entsprechend für v . Also liegt die Lösung für kleine $t > 0$ sofort in $\mathbb{R}_+^2$, sodass wir wegen Satz 4.15 über Flüsse $u_0, v_0 > 0$ annehmen können.

Wir definieren nun eine vorwärts invariante, kompakte Menge M in $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$, die (u_0, v_0) enthält. Folglich existiert die Lösung für alle Zeiten. (Wir diskutieren in Beispiel 6.9 weitergehende Aussagen.)

Um M zu konstruieren, wählen wir $0 < \varepsilon < \min\{v_0, \beta/\mu\}$. Es seien $x, y > 0$. Nach (5.12) und

$$g(x, y) = g(x, 0) + \int_0^y \partial_2 g(x, s) ds$$

ist $g(x, y) > 0$. Weiter wächst die Funktion $x \mapsto g(x, y)$ strikt und ihr Bild enthält $[0, \alpha]$ nach dem Zwischenwertsatz. Es also gibt genau eine Zahl $u_\varepsilon > 0$ mit $\alpha = g(u_\varepsilon, \varepsilon)$. Wir setzen ferner $v_* = (\alpha + \beta)/\mu$ und wählen $R > \max\{u_\varepsilon, u_0 + v_0 - v_*\}$. Sei M das abgeschlossene Viereck mit den Ecken $(0, \varepsilon)$, (R, ε) , (R, v_*) und $(0, R + v_*)$. Die obere Seite liegt also in der durch $v = R + v_* - u$ gegebenen Geraden. (Skizze!)

Zunächst liegt (u_0, v_0) in M : Entweder ist $(u_0, v_0) \in [0, R] \times [\varepsilon, v_*]$, oder wir haben $v_0 > v_*$ und verwenden $u_0 + v_0 < R + v_*$. Theorem 5.14 und die folgenden Überlegungen implizieren ferner die positive Invarianz von M für (5.11).

1) Auf der linken Vertikalen $\{0\} \times [\varepsilon, R + v_*]$ ist ν ein positives Vielfaches von $-e_1$ und wir haben oben schon $(f(0, y)| - e_1) < 0$ gesehen.

2) Auf der Horizontalen $[0, R] \times \{\varepsilon\}$ ist ν positiv proportional zu $-e_2$, und es gilt

$$(f(x, \varepsilon)| - e_2) = -f_2(x, \varepsilon) = -\beta + \mu\varepsilon - g(x, \varepsilon) < -g(x, \varepsilon) < 0.$$

3) Auf der rechten Vertikalen $\{R\} \times [\varepsilon, v_*]$ ist ν ein positives Vielfaches von e_1 . Weiter erhalten wir

$$(f(R, y)|e_1) = \alpha - g(R, y) \leq \alpha - g(u_\varepsilon, \varepsilon) = 0,$$

wobei die Monotonie von g gemäß (5.12) eingeht.

4) Auf der Diagonalen $\{x \geq 0, y \geq v_* \mid x + y = R + v_*\}$ ist ν positiv proportional zu $e_1 + e_2$. Hier liefert die Struktur von f die Gleichung

$$(f(x, y)|e_1 + e_2) = \alpha + \beta - \mu y \leq \alpha + \beta - \mu v_* = 0.$$

Somit haben wir die Invarianzbedingung (5.10) für alle äußeren Normalen außerhalb der Ecken nachgerechnet. Etwa für die Ecke (R, v_*) ist jede äußere Normale eine Konvexkombination $\nu = \tau(se_1 + (1-s)(e_1 + e_2))$ mit $\tau > 0$ und $s \in [0, 1]$. (Genau für solche ν ist (R, v_*) der Punkt in M mit minimalem Abstand zu $(R, v_*) + \nu$.) Die obigen Aussagen zeigen nun

$$(f(R, v_*)|\nu) = \tau(s(f(R, v_*)|e_1) + (1-s)(f(R, v_*)|e_1 + e_2)) \leq 0$$

Die anderen Ecken behandelt man entsprechend. ◇

KAPITEL 6

Langzeitverhalten

In den ersten beiden Abschnitten untersuchen wir im autonomen Fall, wie sich die Lösungen von (4.1) in der Nähe eines Fixpunktes für große Zeiten verhalten. Im letzten Abschnitt diskutieren wir ein Instrument, dass auch globale Aussagen erlaubt. Dazu seien stets $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ lokal Lipschitz, $t_0 = 0$ und $J = \mathbb{R}$. Dies ist nur ein Einstieg in das Studium des Langzeitverhaltens; andere Fragestellungen und weitergehende Resultate findet man etwa in [5].

6.1. Stabilität von stationären Lösungen

Man kennt in einer Anwendung wegen Meßfehlern den Anfangswert u_0 nie ganz genau. Von daher kann man auch einen Fixpunkt u_* nie exakt einstellen. Deswegen ist es wichtig, dass kleine Abweichungen $u_0 - u_*$ die Lösung nicht zu stark beeinflussen. In Erweiterung von Theorem 4.9 c) wollen wir nun untersuchen, wann die Abbildung $u_0 \mapsto u(t)$ bei u_* gleichmäßig in $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig ist, bzw. wann alle nahe bei u_* startenden Lösungen für $t \rightarrow +\infty$ gegen u_* konvergieren.

DEFINITION 6.1. Seien $u_* \in D$ mit $f(u_*) = 0$ und u löse (4.1) und (4.2).

a) Der Fixpunkt u_* heißt (Lyapunov-) stabil, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall u_0 \in \overline{B}(u_*, \delta) \cap D : \bar{t}(u_0) = +\infty \text{ und } u(t) \in \overline{B}(u_*, \varepsilon) \quad (\forall t \geq 0).$$

b) Man nennt den Fixpunkt u_* instabil, wenn er nicht stabil ist; das heißt,

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in \overline{B}(u_*, 1/n) \cap D \text{ mit } \bar{t}(x_n) < +\infty \\ \text{oder mit } t_n \rightarrow +\infty \quad \text{und} \quad |u(t_n; x_n) - u_*|_2 \geq \varepsilon_0. \end{aligned}$$

c) Der Fixpunkt u_* ist asymptotisch stabil, wenn er stabil und attraktiv ist; d.h.,

$$\exists r > 0 \quad \forall u_0 \in \overline{B}(u_*, r) \cap D : \bar{t}(u_0) = +\infty \quad \text{und} \quad u(t) \rightarrow u_* \quad (t \rightarrow +\infty).$$

Man beachte, dass diese Begriffe nur eine eventuell kleine Umgebung von u_* betreffen. Es gibt Fixpunkte, die attraktiv aber nicht stabil sind, siehe eine Übung. In den nächsten (Standard-)Beispielen sehen wir Fixpunkte, die stabil aber nicht attraktiv sind. Ferner kann man den Fall $D \subseteq \mathbb{R}$ einfach und erschöpfend behandeln.

BEISPIEL 6.2. a) Im ungedämpften Pendel aus Beispiel 5.7 sind die Fixpunkte $p_k^s = (2k\pi, 0)$ und $p_k^u = (2k\pi + \pi, 0)$ für $k \in \mathbb{Z}$ nicht attraktiv, da kein Orbit gegen p_k^s und nur zwei gegen p_k^u konvergieren. Ferner ist das Gleichgewicht p_k^u instabil, da etwa zwei heterokline Orbits von ihm weglaufen. Hingegen ist p_k^s stabil.

Um letzteres zu beweisen, betrachten wir $k = 0$. (Andere k behandelt man entsprechend.) Die periodischen Lösungen um $(0, 0)$ verlaufen auf der Kurve

$$\{(x, y_c(x)) \mid x \in [-x_c, x_c], y_c(x) = \pm \sqrt{2c - 2\gamma(1 - \cos x)/\ell}\}$$

mit $x_c = \arccos(1 - c\ell/\gamma) \in (0, \pi)$ und $c := H(u_0, v_0) = \gamma(1 - \cos u_0)/\ell + v_0^2/2 < 2\gamma/\ell$. (Siehe Fall 2) nach (5.4).) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $c(\varepsilon) \in (0, 2\gamma/\ell)$ so klein, dass $\varepsilon/\sqrt{2} \geq |x_{c(\varepsilon)}| \geq |x|$ und $|y_{c(\varepsilon)}(x)| \leq \sqrt{2c(\varepsilon)} \leq \varepsilon/\sqrt{2}$ gelten. Dann sind die Punkte $(x, y_{c(\varepsilon)}(x))$ in $\overline{B}(0, \varepsilon)$ enthalten. Wir finden nun so einen Radius $\delta > 0$, dass für alle $(u_0, v_0) \in \overline{B}(0, \delta)$ die ‘Energie’ $H(u_0, v_0) = c$ kleiner gleich $c(\varepsilon)$ ist. Also liegt die Lösung $(u(t), v(t))$ für alle $t \geq 0$ wie gefordert in $\overline{B}(0, \varepsilon)$.

Ähnlich zeigt man die Stabilität des Koexistenzequilibriums (u_*, v_*) im Räuber-Beute Modell mit linearem Wachstum aus Beispiel 5.8.

b) Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ und $f(u_*) = 0$. Sei $f'(u_*) < 0$. Dann gibt es eine Zahl $r > 0$ mit $(u_* - r, u_* + r) \subseteq D$, $f > 0$ auf $(u_* - r, u_*)$ und $f < 0$ auf $(u_*, u_* + r)$. Nach Satz 5.2 konvergieren dann alle Lösungen mit $u_0 \in (u_* - r, u_* + r)$ monoton gegen u_* . Also ist u_* asymptotisch stabil. (Für die Stabilität wählt man $\varepsilon \in (0, r)$ und setzt einfach $\delta = \varepsilon$.)

Ähnlich folgt aus der Ungleichung $f'(u_*) > 0$ die Instabilität von u_* . Im Grenzfall $f'(u_*) = 0$ kann u_* asymptotisch stabil, instabil oder (nicht-asymptotisch) stabil sein. Betrachte dazu f mit Vorzeichenwechsel $+/-$ bei u_* für die asymptotische Stabilität, mit jedem anderen für die (evt. ‘halbseitige’) Instabilität und für den letzten Fall eine Funktion f , die in der Nähe von u_* verschwindet. $\diamond$

Im linearen Fall untersuchen wir (4.1) für das Vektorfeld $f(x) = Ax$ auf $D = \mathbb{R}^m$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Aus $Au_* = 0$ folgt dann $e^{tA}u_* = u_*$. Basierend auf Satz 4.22 erhalten wir hier eine bequeme Charakterisierung der obigen Begriffe durch die Eigenwerte von A . Man beachte, dass die Aussagen dabei global und gleichmäßig auf Kugeln um u_* gelten. Weiter ist die Konvergenz gegen u_* automatisch exponentiell.

THEOREM 6.3. *Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $u_* \in \mathbb{R}^m$ mit $Au_* = 0$ und u die Lösung von (4.1) und (4.2) zu $f(x) = Ax$ und $u_0 \in \mathbb{R}^m$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) *Der Fixpunkt ist genau dann asymptotisch stabil, wenn die Spektralschranke*

$$s(A) = \max \{ \operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \text{ Eigenwert von } A \} < 0$$

erfüllt. In diesem Fall gibt es für jedes $\alpha \in (0, -s(A))$ eine Konstante $M_\alpha \geq 1$ mit

$$|u(t) - u_*|_2 \leq M_\alpha e^{-\alpha t} |u_0 - u_*|_2 \quad (\forall t \geq 0).$$

b) *Der Fixpunkt u_* ist genau dann stabil, wenn $s(A) \leq 0$ gilt und jeder Eigenwert λ von A mit $\operatorname{Re} \lambda = 0$ halbeinfach ist. Dann gibt es eine Konstante $M \geq 1$ mit*

$$|u(t) - u_*|_2 \leq M |u_0 - u_*|_2 \quad (\forall t \geq 0).$$

BEWEIS. a) Seien $s(A) < -\alpha < 0$, $u_0 \in \mathbb{R}^m$ und $t \geq 0$. Laut Satz 4.22 gilt $\|e^{tA}\| \leq M_\alpha e^{-\alpha t}$ für eine Konstante $M_\alpha \geq 1$. Daraus folgt

$$|u(t) - u_*|_2 = |e^{tA}(u_0 - u_*)|_2 \leq \|e^{tA}\| |u_0 - u_*|_2 \leq M_\alpha e^{-\alpha t} |u_0 - u_*|_2.$$

Sei weiter $\varepsilon > 0$. Wir setzen $\delta = \varepsilon/M_\alpha$. Für $u_0 \in \overline{B}(u_*, \delta)$ folgt die Stabilität von u_* durch

$$|u(t) - u_*|_2 \leq M_\alpha |u_0 - u_*|_2 \leq M_\alpha \delta = \varepsilon.$$

Sei nun $s(A) \geq 0$. Wir müssen zeigen, dass u_* nicht asymptotisch stabil ist. Nach Voraussetzung haben wir einen Eigenwert $\lambda = s(A) + i\tau$ mit $\tau \in \mathbb{R}$ und einem Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ von A . Wir konstruieren nun eine reelle Lösung, die nicht gegen u_* konvergiert. Es sei etwa $\operatorname{Re} v \neq 0$. (Sonst verwende $\operatorname{Im} v$.) Die Funktion $u(t) = u_* + e^{tA} \operatorname{Re} v$ löst (4.1) für $f(x) = Ax$ und den Anfangswert $u_* + \operatorname{Re} v$. Da e^{tA} reell ist, gilt

$$u(t) - u_* = e^{tA} \operatorname{Re} v = \operatorname{Re}(e^{tA} v) = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \lambda^n v = \operatorname{Re}(e^{\lambda t} v) = e^{s(A)t} \operatorname{Re}(e^{i\tau t} v).$$

(Siehe die abgesetzte Formel nach (4.33).) Wenn $\tau = 0$ sein sollte, ergibt sich wie gewünscht $|u(t) - u_*|_2 \geq |\operatorname{Re} v|_2 > 0$ für alle $t \geq 0$. Im Falle $\tau \neq 0$ ist auch $s(A) - i\tau$ ein Eigenwert von A (da A reell ist), sodass wir $\tau > 0$ wählen können. Wir setzen nun $t_n = 2\pi n/\tau$ für $n \in \mathbb{N}$ und erhalten

$$u(t_n) - u_* = e^{s(A)t_n} \operatorname{Re}(e^{i2\pi n} v) = e^{s(A)t_n} \operatorname{Re} v,$$

was für $n \rightarrow \infty$ nicht verschwindet.

b) Man folgert die Stabilität und die behauptete Abschätzung wie in Schritt a) mittels Satz 4.22 aus der Eigenwertbedingung. Wenn $s(A) > 0$ ist, zeigt man die Instabilität wie oben. Sei also $s(A) = 0$ und $\lambda = i\tau \in i\mathbb{R}$ ein nicht halbeinfacher Eigenwert von A . Nach Theorem 5.23 in Analysis 2 gibt es dann solche Vektoren $v, w \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$, dass $u(t) = u_* + \operatorname{Re}(e^{i\tau t}(w + tv))$ das Problem (4.1) für $f(x) = Ax$ und den Anfangswert $u_* + \operatorname{Re} w$ löst, wobei wir wieder $\operatorname{Re} v \neq 0$ annehmen können. Sei $\tau > 0$. Wir setzen $t_n = 2\pi n/\tau$ und erhalten

$$|u(t_n) - u_*|_2 = |\operatorname{Re}(e^{i2\pi n}(w + t_n v))|_2 \geq t_n |\operatorname{Re} v|_2 - |\operatorname{Re} w|_2 \rightarrow +\infty$$

für $n \rightarrow \infty$. Für $\tau \leq 0$ argumentiert wie in Teil a). Also ist u_* instabil. $\square$

Man kann die Stabilitätsbedingung $s(A) < 0$ nachweisen, ohne alle Eigenwerte zu berechnen.

BEISPIEL 6.4. a) Seien $m = 2$ und $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Dann sind die beiden Eigenwerte von A durch

$$\lambda_{1/2} = \frac{\operatorname{sp}(A)}{2} \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sp}(A)^2}{4} - \det A}$$

mittels Spur und Determinante von A gegeben. Folglich ist $s(A) < 0$ äquivalent zu $\operatorname{sp}(A) < 0$ und $\det(A) > 0$. Weiter gilt genau dann $s(A) > 0$, wenn $\operatorname{sp}(A) > 0$ oder

$\det(A) < 0$ ist. Man beachte, dass man die beiden reellen Zahlen $\operatorname{sp}(A)$ und $\det(A)$ direkt durch die Koeffizienten von A ausdrücken kann.

b) Das Routh-Hurwitz Kriterium charakterisiert die Ungleichung $s(A) < 0$ für $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mittels der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms q von A , siehe Satz 5.4.3 in [5] oder Abschnitte I.2.2 und I.2.3 in [10]. Für $m = 3$ ergibt sich mit $q(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ die Äquivalenz

$$s(A) < 0 \iff a > 0, c > 0, ab > c.$$

Für $m = 4$ und $q(\lambda) = \lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$ erhält man

$$s(A) < 0 \iff a > 0, d > 0, ab > c, abc > c^2 + a^2d. \quad \diamond$$

Wir verwenden das obige Theorem exemplarisch, um eine Konvergenzaussage für das zugehörige inhomogene System zu zeigen.

KOROLLAR 6.5. Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit $s(A) < 0$, $u_0 \in \mathbb{R}^m$, $g \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}^m)$ mit $g(t) \rightarrow y$ für $t \rightarrow +\infty$, und u die Lösung von

$$u'(t) = Au(t) + g(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0.$$

Dann konvergiert $u(t)$ gegen $-A^{-1}y = \int_0^\infty e^{sA}y \, ds$ für $t \rightarrow +\infty$.

BEWEIS. Seien $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}^m$. Gemäß Satz 4.22 gilt $\|e^{tA}\| \leq Me^{-\alpha t}$ für Konstanten $\alpha \in (0, -s(A))$ und $M \geq 1$. Somit existiert das obige Integral. Der Hauptsatz und die Konvergenz von e^{tA} liefern die letzte Aussage mittels

$$A \int_0^\infty e^{sA}x \, ds = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b Ae^{sA}x \, ds = \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{bA}x - x) = -x.$$

Wir manipulieren nun die Duhamelsche Formel (4.31) so, dass wir die Konvergenz von e^{tA} und g ausnützen können. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es eine Zeit $t_\varepsilon \geq 0$ mit $|g(t) - y|_2 \leq \varepsilon$ für alle $t \geq t_\varepsilon$. Für $t \geq t_\varepsilon$ berechnen wir

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(s) \, ds \\ &= e^{tA}u_0 + e^{(t-t_\varepsilon)A} \int_0^{t_\varepsilon} e^{(t_\varepsilon-s)A}g(s) \, ds + \int_{t_\varepsilon}^t e^{(t-s)A}(g(s) - y) \, ds + \int_{t_\varepsilon}^t e^{(t-s)A}y \, ds. \end{aligned}$$

Das erste Integral in der zweiten Zeile bezeichnen wir mit x_ε ; das letzte ist gleich $\int_0^{t-t_\varepsilon} e^{\tau A}y \, d\tau$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} |u(t) + A^{-1}y|_2 &\leq Me^{-\alpha t}(|u_0|_2 + e^{\alpha t_\varepsilon}|x_\varepsilon|_2) + \int_{t_\varepsilon}^t Me^{-\alpha(t-s)}\varepsilon \, ds + \int_{t-t_\varepsilon}^\infty Me^{-\alpha\tau}|y|_2 \, d\tau \\ &\leq M(|u_0|_2 + e^{\alpha t_\varepsilon}|x_\varepsilon|_2)e^{-\alpha t} + M\alpha^{-1}|y|_2e^{-\alpha(t-t_\varepsilon)} + M\alpha^{-1}\varepsilon, \end{aligned}$$

da $\int_{t_\varepsilon}^t e^{-\alpha(t-s)} \, ds = \int_0^{t-t_\varepsilon} e^{-\alpha\tau} \, d\tau \leq \alpha^{-1}$ gilt. Wir finden nun so eine Zeit $T_\varepsilon \geq t_\varepsilon$, dass wie behauptet $|u(t) + A^{-1}y|_2 \leq \varepsilon + M\alpha^{-1}\varepsilon$ für $t \geq T_\varepsilon$ folgt. $\square$

6.2. Das Prinzip der linearisierten Stabilität

Im linearen Fall haben wir überprüfbare Kriterien für die asymptotische Stabilität eines Fixpunktes erzielt. Für $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ mit $f(u_*) = 0$ kann man nun hoffen, dass die Eigenwerte der Matrix $A := f'(u_*)$ das Verhalten der Lösungen von (4.1) in der Nähe von u_* bestimmen. Das ist in der Tat weitgehend richtig, wenn A keine rein imaginären Eigenwerte besitzt, siehe etwa Satz 10.1.1 in [5]. Wir beweisen hier nur ein einfacheres, aber auch für die Anwendungen sehr wichtiges Resultat, das auf *Lyapunov* (1892) zurückgeht. Im Falle imaginärer Eigenwerte belegt Beispiel 6.2 b), dass die Linearisierung A alleine keine Stabilitätsaussage ermöglicht. Komplexere Sätze in dieser Situation findet man in den Abschnitten 10.4 und 10.5 von [5].

Man beachte, dass das nächste Theorem für $s(A) < 0$ wieder exponentielle Konvergenz liefert, aber diesmal nur für u_0 aus einer (evt. kleinen) Kugel um u_* .

THEOREM 6.6. *Seien $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$, $f(u_*) = 0$ für ein $u_* \in D$ und $A := f'(u_*) \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) *Sei $s(A) < 0$. Wähle $\alpha \in (0, -s(A))$. Dann gibt es solche Konstanten $\rho > 0$ und $c \geq 1$, dass $\overline{B}(u_*, \rho) \subseteq D$ ist, sowie $\bar{t}(u_0) = +\infty$ und*

$$|u(t) - u_*|_2 \leq ce^{-\alpha t} |u_0 - u_*|_2$$

für alle $t \geq 0$ und jedes $u_0 \in \overline{B}(u_, \rho)$ gelten, wobei u die Lösung von (4.1) und (4.2) ist. Insbesondere ist u_* asymptotisch stabil.*

b) *Sei $s(A) > 0$. Dann ist u_* instabil.*

BEWEIS. a) Die erste Behauptung in a) zeigt man wie in Theorem 5.28 aus Analysis 2, wo der Fall $D = \mathbb{R}^m$ behandelt wurde. Die Stabilität folgt dann wie in Theorem 6.3 a). Wir wiederholen den Ansatz des Beweises, der unten in Teil b) aufgegriffen wird.

Zunächst liefern die Voraussetzung und Satz 4.22 so eine Konstante $M \geq 1$, dass die Ungleichung $\|e^{tA}\| \leq Me^{-\alpha t}$ für alle $t \geq 0$ gilt. Da f bei u_* die Ableitung A hat, gibt es für jede Schranke $\varepsilon > 0$ so einen Radius $\delta = \delta_\varepsilon > 0$, dass $\overline{B}(u_*, \delta) \subseteq D$ ist und jedes $x \in \overline{B}(u_*, \delta)$ die Abschätzung

$$|f(u_* + x) - f(u_*) - Ax|_2 \leq \varepsilon |x|_2 \quad (6.1)$$

erfüllt ist. Wir erinnern hier an $f(u_*) = 0$ und setzen

$$g(x) = f(u_* + x) - f(u_*) - Ax$$

für $x \in D - u_*$. Es sei u die maximale Lösung von (4.1) und (4.2) nach Theorem 4.9. Wir betrachten den Abstand $v(t) = u(t) - u_* \in D - u_*$ zum Fixpunkt für $t \in [0, \bar{t}(u_0))$. Diese Funktion löst das Problem

$$\begin{aligned} v'(t) &= u'(t) = f(u_* + v(t)) = Av(t) + g(v(t)), & t \geq 0, \\ v(0) &= u_* - u_0 =: v_0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Gemäß der Duhamelschen Formel (4.31) ist v durch

$$v(t) = e^{tA}v_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}g(v(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, \bar{t}(u_0)), \quad (6.3)$$

gegeben. Wir betrachten nun v_0 mit $|v_0|_2 \leq \rho < \delta$ und verwenden die Schranke $\|e^{(t-\tau)A}\| \leq Me^{-\alpha(t-\tau)}$. Solange $|v(\tau)|_2 \leq \delta$ gilt, wird ferner $|g(v(\tau))|_2$ durch $\varepsilon|v(\tau)|_2$ dominiert. Für eine geeignete Wahl von $\rho \in (0, \delta)$ kann man nun mittels der Gronwallschen Ungleichung zeigen, dass $|v(t)|_2 < \delta$ für alle $t \in [0, \bar{t}(u_0))$ gilt (woraus mit Theorem 4.9 schon $\bar{t}(u_0) = +\infty$ folgt) und dass die behauptete exponentielle Abschätzung erfüllt ist. Siehe den Beweis von Theorem 5.28 in Analysis 2.

b) 1) Für Teil b) verwenden wir eine Variante der Lösungsformel (6.3), die einige Vorbereitungen aus der Linearen Algebra (zur ‘Spektralzerlegung’) erfordert, welche auch von allgemeinerem Interesse sind.

Wir bezeichnen die Eigenwerte von A so, dass $s(A) = \operatorname{Re} \lambda_1 \geq \operatorname{Re} \lambda_2 \geq \dots \geq \operatorname{Re} \lambda_N$ gilt. Weiter können wir eine Zahl $\eta \in [0, -s(A))$ wählen, für die $\operatorname{Re} \lambda_j - \eta \neq 0$ für alle $j \in \{1, \dots, N\}$ ist. Dabei erhalten wir $\operatorname{Re} \lambda_1 - \eta > 0$. Die Matrix $B = A - \eta I$ hat die Eigenwerte $\mu_j = \lambda_j - \eta$ mit den algebraischen Vielfachheiten m_j von λ_j . Außerdem liefert (4.33) die Gleichung $e^{tB} = e^{-\eta t} e^{tA}$ für $t \in \mathbb{R}$. Sei $l \in \{1, \dots, N\}$ der größte Index j mit $\operatorname{Re} \mu_j > 0$, woraus $\operatorname{Re} \mu_l > 0 > \operatorname{Re} \mu_{l+1}$ im Falle $l < N$ und $\operatorname{Re} \mu_N > 0$ falls $l = N$ folgen. Wir setzen ferner $\nu = m_1 + \dots + m_l \in \mathbb{N}$.

Sei $B = SJS^{-1}$ die Jordannormalform von B . Die Jordanblöcke in J bzw. e^{tJ} zu den Eigenwerten mit $\operatorname{Re} \mu_j > 0$ haben zusammen die Größe $\nu \times \nu$. Wir definieren

$$Q = \begin{pmatrix} I_{\nu \times \nu} & 0_{\nu \times (m-\nu)} \\ 0_{(m-\nu) \times \nu} & 0_{(m-\nu) \times (m-\nu)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad P_u = SQS^{-1}, \quad P_s = S(I - Q)S^{-1}.$$

Man berechnet dann leicht $Q^2 = Q$, $P_s = SS^{-1} - SQS^{-1} = I - P_u$, $P_u + P_s = I$, $P_u^2 = SQ^2S^{-1} = P_u$ und $P_s^2 = I - 2P_u + P_u^2 = I - P_u = P_s$, sodass P_s und P_u komplementäre Projektionen sind. (Man nennt sie ‘stabil’ bzw. ‘instabil’.) Es gelten also $P_u P_s = P_u - P_u^2 = 0$ und $P_s P_u = 0$.

Nun definieren wir die Teilräume $X_u = P_u \mathbb{C}^m$ und $X_s = P_s \mathbb{C}^m$. Jedes $x \in \mathbb{C}^m$ liegt in der Summe $X_u + X_s$, da $x = P_u x + P_s x$ gilt. Sei umgekehrt $x = x_u + x_s$ für Vektoren $x_i = P_i y_i \in X_i$ mit $y_i \in \mathbb{C}^m$ und $i \in \{u, s\}$. Dann folgen $P_i x_i = P_i^2 y_i = x_i$ und damit $P_u x = x_u + P_u P_s y_s = x_u$, sowie analog $P_s x = x_s$. Also wird x durch $x = P_u x + P_s x$ eindeutig in $X_u + X_s$ dargestellt. Insbesondere ergibt sich $X_u \cap X_s = \{0\}$. (Man spricht von einer *direkten Summe* und schreibt $X = X_s \oplus X_u$.)

Wir zerlegen weiter B und e^{tB} passend zu $X = X_s \oplus X_u$. Dazu beobachten wir

$$\begin{aligned} P_u B &= SQS^{-1}SJS = SQJS^{-1} = S \begin{pmatrix} J(\mu_1, k_{11}) & & 0 \\ & \ddots & \\ & & J(\mu_l, k_{ld_l}) & 0 \\ & & 0 & 0 \\ 0 & & & \ddots & 0 \end{pmatrix} S^{-1} \\ &= SJQS^{-1} = BP_u =: B_u, \end{aligned}$$

und entsprechend $P_s B = B P_s =: B_s$. Daraus ergibt sich die Invarianz $B(X_i) = B P_i(X) = P_i B(X) \subseteq X_i$ für $i \in \{u, s\}$, sodass wir B zu (gleich bezeichneten) Abbildungen $B_i : X_i \rightarrow X_i$ einschränken können. Ähnlich gelten

$$\begin{aligned} P_u e^{tB} &= S Q e^{tJ} S^{-1} = S \begin{pmatrix} P_{\mu_1, k_{11}}(t) & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & P_{\mu_l, k_{ld_l}}(t) & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} S^{-1} \\ &= S e^{tJ} Q S^{-1} = e^{tB} P_u, \\ e^{tB_u} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B_u^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} S (QJ)^n S^{-1} = S e^{tQJ} S^{-1} = S e^{tJ} Q S^{-1} = e^{tB} P_u \end{aligned}$$

für $t \in \mathbb{R}$, wobei auch die Jordannormalform (4.34) von e^{tB} und die obige von B_u eingingen. Genauso zeigt man die Gleichungen $P_s e^{tB} = e^{tB} P_s = e^{tB_s}$.

Man sieht leicht, dass $s(B_s) < 0$ und $s(-B_u) < 0$ gelten. Satz 4.22 liefert somit die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |e^{tB_s} x|_2 &\leq N e^{-\beta t} |x|_2, & x \in X_s, \\ |e^{-tB_u} x|_2 &\leq N e^{-\beta t} |x|_2, & x \in X_u, \end{aligned} \quad (6.4)$$

für Konstanten $N \geq 1$ und $\beta > 0$ und alle $t \geq 0$. (Solche e^{tB} heißen ‘exponentiell dichotom’.) Für $x \in X_u$ ergibt sich daraus und aus (4.30) die untere Abschätzung

$$|x|_2 = |e^{-tB_u} e^{tB_u} x|_2 \leq N e^{-\beta t} |e^{tB_u} x|_2, \quad t \geq 0. \quad (6.5)$$

2) Wir nehmen jetzt an, u_* wäre stabil. Wir setzen

$$\kappa = \frac{\beta}{2N(\|P_s\| + \|P_u\|)}.$$

Wegen (6.1) gibt es so einen Radius $\gamma > 0$, dass aus $|x|_2 \leq \gamma$ die Abschätzung $|g(x)|_2 \leq \kappa |x|_2$ folgt. Die Widerspruchsannahme liefert nun so eine Zahl $\delta > 0$, dass für jeden Anfangswert $u_0 \in \overline{B}(u_*, \delta)$ die Lösung $u = v + u_*$ von (4.1) und (4.2) die Eigenschaften $\bar{t}(u_0) = +\infty$ und $|v(t)|_2 \leq \gamma$ für alle $t \geq 0$ besitzt, wobei wir auch $\overline{B}(u_*, \delta) \subseteq D$ annehmen können. Somit erhalten wir die Ungleichung

$$|g(v(t))|_2 \leq \kappa |v(t)|_2, \quad t \geq 0. \quad (6.6)$$

Wir betrachten Vektoren $v_0 \in X_u \neq \{0\}$ mit $0 < |v_0|_2 \leq \delta$ und setzen $u_0 = u_* + v_0$. Mit den Eigenschaften aus Schritt 1) formen wir die Lösungsformel (6.3) um zu

$$\begin{aligned} e^{-\eta t} v(t) &= e^{-\eta t} e^{tA} v_0 + \int_0^t e^{-\eta(t-\tau)} e^{(t-\tau)A} e^{-\eta\tau} (P_u + P_s) g(v(\tau)) d\tau \\ &= e^{tB} P_u v_0 + \int_0^\infty e^{tB_u} e^{-\tau B_u} P_u^2 e^{-\eta\tau} g(v(\tau)) d\tau + \int_0^t e^{(t-\tau)B_s} P_s e^{-\eta\tau} g(v(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_t^\infty e^{(t-\tau)B_u} P_u e^{-\eta\tau} g(v(\tau)) d\tau \\
& = e^{tB_u} P_u \left[v_0 + \int_0^\infty e^{-\tau B_u} P_u e^{-\eta\tau} g(v(\tau)) d\tau \right] + \int_0^t e^{(t-\tau)B_s} P_s e^{-\eta\tau} g(v(\tau)) d\tau \\
& \quad - \int_t^\infty e^{(t-\tau)B_u} P_u e^{-\eta\tau} g(v(\tau)) d\tau
\end{aligned} \tag{6.7}$$

für $t \geq 0$. Die Integrale über unbeschränkte Intervalle existieren dabei wegen (6.4) und dem Majorantenkriterium. Wir bezeichnen den Vektor [...] mit $y \in X_u$ und die beiden letzten Integrale mit $h_s(t)$ bzw. $h_u(t)$. Die Relationen (6.4) und (6.6) sowie $|v(\tau)|_2 \leq \gamma$ liefern nun die zentralen Abschätzungen

$$\begin{aligned}
|h_s(t)|_2 & \leq \int_0^t N e^{-\beta(t-\tau)} \|P_s\| e^{-\eta\tau} \kappa |v(\tau)|_2 d\tau \\
& \leq \kappa N \|P_s\| \max_{\tau \in [0, t]} (e^{-\eta\tau} |v(\tau)|_2) \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} d\tau \leq \frac{\kappa N \|P_s\|}{\beta} \gamma, \\
|h_u(t)|_2 & \leq \int_t^\infty N e^{\beta(t-\tau)} \|P_u\| e^{-\eta\tau} \kappa |v(\tau)|_2 d\tau \\
& \leq \kappa N \|P_u\| \max_{\tau \geq t} (e^{-\eta\tau} |v(\tau)|_2) \int_t^\infty e^{\beta(t-\tau)} d\tau \leq \frac{\kappa N \|P_u\|}{\beta} \gamma
\end{aligned}$$

für $t \geq 0$. Formel (6.5) impliziert andererseits die untere Schranke

$$|e^{tB_u} P_u y|_2 \geq N^{-1} e^{\beta t} |P_u y|_2.$$

Damit folgern wir aus (6.7) die Ungleichung

$$\gamma \geq e^{-\eta t} |v(t)|_2 \geq \frac{1}{N} e^{\beta t} |P_u y|_2 - \frac{\kappa N \gamma}{\beta} (\|P_u\| + \|P_u\|)$$

für alle $t \geq 0$. Für $t \rightarrow +\infty$ erzwingt dies $0 = P_u y = y$. Wir setzen $y = 0$ in (6.7) ein und verwenden die obigen Abschätzungen. Mittels der Definition von κ schließen wir dann

$$e^{-\eta t} |v(t)|_2 \leq \frac{\kappa N}{\beta} (\|P_u\| + \|P_u\|) \max_{\tau \geq 0} e^{-\eta\tau} |v(\tau)|_2 = \frac{1}{2} \max_{\tau \geq 0} (e^{-\eta\tau} |v(\tau)|_2)$$

für alle $t \geq 0$, was nur für $v = 0$ möglich ist. Dies widerspricht aber $v(0) = v_0 \neq 0$, sodass u_* instabil sein muss. $\square$

Wir diskutieren zwei typische Beispiele, die wir im nächsten Abschnitt vertiefen.

BEISPIEL 6.7. Wie in Beispiel 4.11 betrachten wir das gedämpfte Pendel beschrieben durch

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -\frac{\gamma}{\ell} \sin x - \frac{1}{\ell m} R(y) \end{pmatrix},$$

mit Konstanten $m, \gamma, \ell > 0$ und eine Funktion $R \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $R(0) = 0$ und $R'(0) > 0$ (z.B. $R(y) = dy$ für ein $d > 0$). Hier gilt $f(x, y) = 0$ genau dann, wenn

$y = 0$ und $\sin x = 0$ sind. Also sind alle Fixpunkte (u_*, v_*) durch $(k\pi, 0)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gegeben. Weiter erhalten wir

$$A := f'(u_*, v_*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\gamma}{\ell} \cos(k\pi) & -\frac{R'(0)}{\ell m} \end{pmatrix}.$$

Somit hat A die Spur $-R'(0)/(\ell m) < 0$ und die Determinante $\gamma \cos(k\pi)/\ell$, die für gerade k positiv und für ungerade negativ ist. Laut Beispiel 6.4 und Theorem 6.6 sind die Fixpunkte für gerade k asymptotisch stabil und für ungerade instabil. $\diamond$

BEISPIEL 6.8. Das Räuber-Beute-Modell mit begrenztem Wachstum (4.15) aus Beispiel 4.13 wird durch die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} ax - bx^2 - rxy \\ -cy + sxy \end{pmatrix},$$

für Konstanten $a, b, c, r, s > 0$ beschrieben. Dieses Vektorfeld ist genau dann gleich 0, wenn

$$x(a - bx - ry) = 0 \quad \text{und} \quad y(sx - c) = 0$$

gelten. Daraus ergeben sich für $(x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ genau die Lösungen

$$(u^0, v^0) = (0, 0), \quad (\bar{u}, \bar{v}) = \left(\frac{a}{b}, 0\right) \quad \text{und} \quad (\text{falls } as > bc) \quad (u_*, v_*) = \left(\frac{c}{s}, \frac{a}{r} - \frac{bc}{rs}\right).$$

Man beachte, dass für eine Nullstelle aus $x = 0$ schon $y = 0$ folgt. Weiter hat f die Ableitung

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} a - 2bx - ry & -rx \\ sy & -c + sx \end{pmatrix}.$$

Für die drei Equilibria ergeben sich somit die Jakobimatrizen

$$\begin{aligned} A_0 &:= f'(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}, & \bar{A} &:= f'(\bar{u}, \bar{v}) = \begin{pmatrix} -a & -ra/b \\ 0 & -c + sa/b \end{pmatrix}, \\ A_* &:= f'(u_*, v_*) = \begin{pmatrix} -bu_* & -ru_* \\ sv_* & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei wie im letzten Fall die auch Gleichung $a - bu_* - rv_* = 0$ benutzt haben.

Wir wenden nun Theorem 6.6 an. Die Matrix A_0 hat einen positiven Eigenwert und damit gilt $s(A_0) > 0$. Also ist die triviale Lösung $(0, 0)$ instabil. Ebenso hat $\bar{A}$ die Eigenwerte $-a$ und $-c + sa/b$, sodass das *marginale* Gleichgewicht $(\frac{a}{b}, 0)$ für $as < bc$ asymptotisch stabil und für $as > bc$ instabil ist. Sei schließlich $as > bc$. Dann gelten $\text{sp}(A_*) = -bu_* < 0$ und $\det(A_*) = rsu_*v_* > 0$. Nach Beispiel 6.4 ist damit $s(A_*) < 0$ und das Koexistenzequilibrium (u_*, v_*) asymptotisch stabil. $\diamond$

Wir ergänzen noch Beispiel 5.15, wobei auch tieferliegende Theoreme eingehen.

BEISPIEL 6.9. Wir betrachten (5.11) aus Beispiel 5.15. Hier ist

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha - g(x, y), \\ \beta - \mu y + g(x, y) \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$ in D liegt, $\alpha, \beta, \mu > 0$ Konstanten sind und $g \in C^1(D, \mathbb{R})$ die Bedingung (5.12) erfüllt. Insbesondere ist $g > 0$ auf $\mathbb{R}_+^2$. Wenn $f(u_*, v_*) = 0$ ist, gilt auch

$$0 = f_1(u_*, v_*) + f_2(u_*, v_*) = \alpha + \beta - \mu v_*$$

und damit $v_* = (\alpha + \beta)/\mu > 0$. Somit sind die Equilibria durch $\alpha = g(u_*, v_*)$ bestimmt. Laut (5.12) gibt es genau eine Lösung $u_* > 0$ dieser Gleichung, sodass es genau ein Equilibrium (u_*, v_*) gibt, und es ist strikt positiv. Wir berechnen

$$A := f'(u_*, v_*) = \begin{pmatrix} -\partial_1 g(u_*, v_*) & -\partial_2 g(u_*, v_*) \\ \partial_1 g(u_*, v_*) & -\mu + \partial_2 g(u_*, v_*) \end{pmatrix}.$$

Nach (5.12) ist $\det A = \mu \partial_1 g(u_*, v_*)$ positiv. Weiter gilt $\operatorname{sp}(A) = \partial_2 g(u_*, v_*) - \partial_1 g(u_*, v_*) - \mu =: \sigma_*$.

Wenn $\sigma_* < 0$ ist, zeigen Beispiel 6.4 und Theorem 6.6 die asymptotische Stabilität von (u_*, v_*) . Weiter ist das Equilibrium im Fall $\sigma_* > 0$ instabil.

Für $\sigma_* > 0$ kann man aber mehr aussagen. Zunächst haben in diesem Fall beide Eigenwerte von A einen positiven Realteil. Gemäß Satz 10.1.1 von [5] konvergiert dann kein anderer Orbit gegen (u_*, v_*) für $t \rightarrow \infty$. Da die Vorwärtsorbits laut Beispiel 5.15 in einer kompakten Menge in $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$ liegen, gegen keinen Fixpunkt konvergieren können und $m = 2$ ist, zeigt der Satz von Poincaré–Bendixson (siehe Satz 9.2.2 in [5]¹), dass für $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \setminus \{(u_*, v_*)\}$ die Lösung periodisch ist oder gegen einen periodischen Orbit γ strebt, also $\operatorname{dist}((u(t), v(t)), \gamma)$ für $t \rightarrow +\infty$ verschwindet. Insbesondere gibt es einen periodischen Orbit, wenn $\sigma_* > 0$ ist. $\diamond$

6.3. Lyapunovfunktionen

Wir verallgemeinern in diesem Abschnitt den Begriff des ersten Integrals. So können wir etwa in Beispiel 6.13 das gedämpfte Pendel erfassen, bei dem die Energie (ein erstes Integral im ungedämpften Fall) entlang Lösungen abnimmt. Ein solches Abklingverhalten führt oft dazu, dass man globale Konvergenzaussagen treffen kann (im Gegensatz zu den lokalen in Theorem 6.6.)

DEFINITION 6.10. Eine Abbildung $V \in C(D, \mathbb{R})$ heißt Lyapunovfunktion von (4.1), wenn für jedes $u_0 \in D$ die Funktion $\psi_u : [0, \bar{t}(u_0)) \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto V(u(t))$, fällt, wobei u die maximale Lösung (4.1) und (4.2) ist. Wenn ψ_u für jedes $u_0 \in D$ mit $f(u_0) \neq 0$ strikt fällt, nennt man V eine strikte Lyapunovfunktion.

¹Wenn $\gamma_+(u_0)$ in einer kompakten Menge $K \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^2$ liegt und es nur endlich viele Equilibria in K gibt, besagt die allgemeinere Version Satz 9.2.4 in [5], dass die Lösung $u(t)$ von (4.1) für $t \rightarrow +\infty$ nur gegen Fixpunkte, sie verbindende Orbits oder periodische Orbits streben kann.

Lyapunovfunktionen haben weitreichende Konsequenzen für das qualitative Verhalten von Anfangswertproblemen. So liefern sie fast unmittelbar invariante Mengen und damit sehr einfach zu überprüfende Kriterien für die globale Existenz.

SATZ 6.11. *Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ lokal Lipschitz, $V \in C(D, \mathbb{R})$ eine Lyapunovfunktion für (4.1) und $\alpha \in V(D)$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- a) *Die Subniveaumenge $M_\alpha = \{x \in D \mid V(x) \leq \alpha\}$ ist positiv invariant für (4.1).*
- b) *Es gelte $V(x) \rightarrow \infty$ für $|x|_2 \rightarrow \infty$ (bzw. für $\text{dist}(x, \partial D) = \inf_{y \in \partial D} |x - y|_2 \rightarrow 0$). Dann ist M_α beschränkt (bzw. in $\mathbb{R}^m$ abgeschlossen). Wenn beide Voraussetzungen zutreffen, erhalten wir $\bar{t}(u_0) = +\infty$ für jedes $u_0 \in D$.*

BEWEIS. Teil a) folgt sofort aus dem Fallen von $t \mapsto V(u(t))$ für jede Lösung u von (4.1) und (4.2). Für die erste Behauptung in b) nehmen wir an, die Menge M_α wäre für ein $\alpha \in V(D)$ unbeschränkt. Somit gibt es Vektoren x_n in M_α mit $|x_n|_2 \rightarrow +\infty$ für $n \rightarrow \infty$. Nach Voraussetzung konvergiert dann aber auch $V(x_n) \rightarrow +\infty$, was der Eigenschaft $V(x_n) \leq \alpha$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ widerspricht. Die Aussage zu ∂D zeigt man analog. Theorem 4.9 liefert dann die letzte Behauptung, da hier $\overline{M_\alpha} = M_\alpha$ kompakt ist und einen positiven Abstand zu ∂D hat. $\square$

Die nächste handliche Charakterisierung von Lyapunovfunktionen zeigt man wie Satz 5.5. Gemäß Beispiel 6.13 ist die fehlende Implikation in Teil b) im Allgemeinen falsch. Tatsächlich erfordert der Nachweis der Striktheit oft ein Zusatzargument.

SATZ 6.12. *Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ lokal Lipschitz und $V \in C^1(D, \mathbb{R})$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

- a) *Genau dann ist V eine Lyapunovfunktion, wenn $(\nabla V(x)|f(x)) \leq 0$ für jedes $x \in D$ gilt.*
- b) *Wenn V für jedes $x \in D$ mit $f(x) \neq 0$ der Ungleichung $(\nabla V(x)|f(x)) < 0$ genügt, dann ist es eine strikte Lyapunovfunktion.*

Wir diskutieren nun typische Beispiele.

BEISPIEL 6.13. a) Erste Integrale sind (nicht strikte) Lyapunovfunktionen. Hierzu ergänzen wir eine große und wichtige Beispielklasse aus der Physik, die *Hamiltonschen Systeme*. Sei dazu $H \in C^2(D_q \times D_p, \mathbb{R})$ für offene $D_q, D_p \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir schreiben $u = (q, p)$ und betrachten $f = (\partial_p H, -\partial_q H) \in C^1(D_q \times D_p, \mathbb{R}^{2n})$. Dann ist $V = H$ ein erstes Integral von

$$\begin{aligned} q'(t) &= \partial_p H(p(t), q(t)), & t \geq 0, & & q(0) &= q_0 \in D_q, \\ p'(t) &= -\partial_q H(p(t), q(t)), & t \geq 0, & & p(0) &= p_0 \in D_p, \end{aligned} \quad (6.8)$$

da $(f(q, p)|\nabla H(q, p))_{\mathbb{R}^{2n}} = (\partial_p H(q, p)|\partial_q H(q, p))_{\mathbb{R}^n} - (\partial_q H(q, p)|\partial_p H(q, p))_{\mathbb{R}^n}$ gilt.

- b) Das gedämpfte Pendel (4.12) ist durch das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -\frac{\gamma}{\ell} \sin x - \frac{1}{\ell m} R(y) \end{pmatrix},$$

für gegeben. Dabei erfülle die Dämpfung $R \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Relationen $yR(y) \leq 0$ für jedes $y \in \mathbb{R}$ und $R(y) \neq 0$ für alle $y \neq 0$. Es folgt $R(0) = 0$. Beispiel 4.11 liefert für jeden Anfangswert die globale Existenz $\bar{t}(u_0, v_0) = +\infty$. Im Falle $R = 0$ hatten wir in Beispiel 5.7 das erste Integral

$$V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{\gamma}{\ell}(1 - \cos x).$$

gefunden. Dies ist nun eine strikte Lyapunovfunktion für (4.12).

BEWEIS. Sei $x, y \in \mathbb{R}$. Zunächst verwenden wir das obige Kriterium, indem wir

$$\begin{aligned} (\nabla V(x, y)|f(x, y)) &= \gamma\ell^{-1} \sin(x) y + y(-\gamma\ell^{-1} \sin x - (\ell m)^{-1} R(y)) \\ &= -(\ell m)^{-1} y R(y) \leq 0 \end{aligned}$$

berechnen. Also ist V nach Satz 6.12 eine Lyapunovfunktion. Man beachte, dass hier für $y = 0$ keine strikte Ungleichung gilt, auch wenn $f(x, 0) \neq 0$ ist.

Um die Striktheit von V zu zeigen, betrachten wir eine Lösung (u, v) , für die $\psi(t) = V(u(t), v(t))$ in $t \geq 0$ nicht strikt fällt. Da ψ fallend ist, muss ψ auf einem Intervall $[a, b]$ mit $0 \leq a < b$ konstant sein. Für jedes $t \in [a, b]$ implizieren dann die Kettenregel, (4.12) und die oben abgesetzte Formel die Identität

$$0 = \psi'(t) = ((\nabla V)(u(t), v(t))|f(u(t), v(t))) = -(\ell m)^{-1} v(t) R(v(t)).$$

Nach Voraussetzung verschwindet somit v auf $[a, b]$, sodass (4.12) die Gleichung

$$0 = v'(t) = u''(t) = -\frac{\gamma}{\ell} \sin u(t) - \frac{1}{\ell m} R(0) = -\frac{\gamma}{\ell} \sin u(t)$$

für $t \in [a, b]$ liefert. Also ist $(u(t), v(t))$ gleich einem Fixpunkt $(k\pi, 0)$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Satz 4.15 zeigt nun, dass (u, v) wie behauptet ein Fixpunkt ist. $\square$

c) Das gedämpfte Räuber-Beute Modell (4.15) in Beispiel 4.13 wird durch das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} ax - bx^2 - rxy \\ -cy + sxy \end{pmatrix},$$

mit Konstanten $a, b, c, r, s > 0$ beschrieben. Es gelte $as > bc$. Laut Beispiel 5.8 existiert dann das Koexistenzequilibrium

$$(u_*, v_*) = \left(\frac{c}{s}, \frac{a}{r} - \frac{bc}{rs} \right) \in \mathbb{R}_+^2 =: D.$$

Das erste Integral $H(x, y) = sx - c \ln x + ry - a \ln y$ auf D aus Beispiel 5.8 im Falle $b = 0$ ist keine Lyapunovfunktion für (4.15) mit $b \neq 0$, wie man mittels Satz 6.12 nachrechnen kann. Das Problem (4.15) hat hingegen die strikte Lyapunovfunktion

$$V : D \rightarrow \mathbb{R}; \quad V(x, y) = \frac{s}{r}(x - u_* \ln x) + y - v_* \ln y.$$

BEWEIS. Wir wollen zuerst zeigen, wie man diese Lyapunovfunktion finden kann. Durchweg seien $x, y > 0$. Man geht hierbei von dem bekannten ersten Integral H im ungedämpften Fall $b = 0$ aus und macht den Ansatz

$$V(x, y) = \alpha x - \beta \ln x + \gamma y - \delta \ln y$$

für zu bestimmende Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Im Hinblick auf Satz 6.12 berechnen wir

$$\begin{aligned} (\nabla V(x, y)|f(x, y)) &= (\alpha - \beta/x)(ax - bx^2 - rxy) + (\gamma - \delta/y)(sxy - cy) \\ &= (\alpha x - \beta)(a - bx - ry - (a - bu_* - rv_*)) + (\gamma y - \delta)(sx - c - (su_* - c)) \\ &= (\alpha x - \beta)(b(u_* - x) + r(v_* - y)) + (\gamma y - \delta)s(x - u_*), \end{aligned}$$

wobei wir die Nullstellengleichung $(a - bu_* - rv_*, su_* - c) = (0, 0)$ für f eingesetzt haben. Wir wollen einen nichtpositiven Term erzielen, der nur für z.B. $x = u_*$ verschwindet. Dazu setzen wir $\beta = \alpha u_*$ und erhalten

$$(\nabla V(x, y)|f(x, y)) = -\alpha b(x - u_*)^2 - \alpha r(x - u_*)(y - v_*) + s(\gamma y - \delta)(x - u_*).$$

Die anderen beiden Termen wechseln ihre Vorzeichen auf D , sodass sie sich wegkürzen sollten. Dazu wählen wir zunächst $\delta = \gamma v_*$, was auf

$$(\nabla V(x, y)|f(x, y)) = -\alpha b(x - u_*)^2 - \alpha r(x - u_*)(y - v_*) + s\gamma(y - v_*)(x - u_*).$$

führt. Weiter nehmen wir $\gamma = 1$ und $\alpha = s/r$, woraus sich die Gleichung

$$(\nabla V(x, y)|f(x, y)) = -bsr^{-1}(x - u_*)^2$$

ergibt. Als ist V aus der Behauptung nach Satz 6.12 eine Lyapunovfunktion.

Um die Striktheit von V zu zeigen, gehen wir wie in Teil b) vor. Sei (u, v) eine Lösung, für die die Funktion $\psi(t) = V(u(t), v(t))$ in $t \geq 0$ nicht strikt fällt. Also ist ψ auf einem nichttrivialen Intervall J_0 konstant. Wie in b) folgt dann aus (4.15) und der oben abgesetzten Gleichung die Formel

$$0 = \psi'(t) = -bsr^{-1}(u(t) - u_*)^2$$

und damit $u(t) = u_*$ für $t \in J_0$. Die erste Zeile von (4.15) impliziert nun

$$0 = u'(t) = u_*(a - bu_* - rv(t))$$

für $t \in J_0$. Demnach ist $v(t) = v_*$ und somit (u, v) gleich (u_*, v_*) . $\square$

d) Sei $V \in C^2(D, \mathbb{R})$. Für $f = -\nabla V$ betrachten wir das *Gradientensystem*

$$u'(t) = -\nabla V(u(t)), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0. \quad (6.9)$$

Hier gelten $(f(x)|\nabla V(x)) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$ mit $f(x) = -\nabla V(x) \neq 0$. Laut Satz 6.12 ist V eine strikte Lyapunovfunktion von (6.9). $\diamond$

Im folgenden Hauptsatz schließt man die Stabilität eines Fixpunkts aus einer einfach nachzuprüfenden Eigenschaft der Lyapunovfunktion. So kann man etwa die Stabilitätsaussagen in Beispiel 6.2 a) viel einfacher zeigen. Dieses Theorem ist auch eine wichtige Ergänzung unserer Darstellung der ersten Integrale.

THEOREM 6.14. *Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ lokal Lipschitz, $V \in C(D, \mathbb{R})$ eine Lyapunovfunktion für (4.1) und $u_* \in D$ eine strikte lokale Minimalstelle für V (d.h., es gibt so ein $r > 0$, dass $\overline{B}(u_*, r) \subseteq D$ und $V(x) > V(u_*)$ für alle $x \in \overline{B}(u_*, r) \setminus \{u_*\}$ gelten). Dann ist u_* ein Equilibrium und stabil.*

BEWEIS. Zunächst ist u_* ein Equilibrium, da andernfalls $V(u(t; u_*)) \leq V(u_*)$ und $u(t; u_*) \in \overline{B}(u_*, r) \setminus \{u_*\}$ für (kleine) $t > 0$ gälten. Dies stünde im Widerspruch zur angenommenen Striktheit des Minimums $V(u_*)$.

Sei $\varepsilon \in (0, r)$. Wir schreiben η für das Minimum von V auf $\partial B(u_*, \varepsilon)$. Gemäß Annahme ist $\eta > V(u_*)$. Wegen der Stetigkeit von V gibt es dann einen Radius $\delta \in (0, \varepsilon)$ mit $V(x) < \eta$ für alle $x \in \overline{B}(u_*, \delta)$. Sei $u_0 \in \overline{B}(u_*, \delta)$. Die Lösung u von (4.1) und (4.2) erfüllt $V(u(t)) \leq V(u_0) < \eta$ für alle $t \in [0, \bar{t}(u_0))$, da V eine Lyapunovfunktion ist. Wenn es eine Zeit $t_1 \in (0, \bar{t}(u_0))$ mit $|u(t_1) - u_*|_2 = \varepsilon$ gäbe, folgte nach Definition von η der Widerspruch $V(u(t_1)) \geq \eta$. Da u stetig ist, liegen somit alle Zustände $u(t)$ für $t \in [0, \bar{t}(u_0))$ in $B(u_*, \varepsilon)$, sodass Theorem 4.9 die globale Existenz $\bar{t}(u_0) = +\infty$ liefert und u_* stabil ist. $\square$

Das nächste Resultat ist ein einfacher, aber wichtiger Spezialfall des *Invarianzprinzips von LaSalle*, siehe Satz 8.4.3 in [5]. Kompakte Orbits streben im Falle einer strikter Lyapunovfunktion gegen die Equilibrienmenge von f , und wenn die Gleichgewichte diskret liegen, konvergieren diese Orbits gegen einen Fixpunkt. Auf die Diskretheit kann dabei im Allgemeinen nicht verzichtet werden, siehe Beispiel 2 in §8.8 von [5]. Zusammen mit dem nachfolgenden Korollar liefert diese Aussage ein wichtiges Instrument, um die *globale* Attraktivität eines Fixpunktes zu zeigen.

THEOREM 6.15. Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ lokal Lipschitz, $V \in C(D, \mathbb{R})$ eine strikte Lyapunovfunktion für (4.1), $K \subseteq D$ kompakt, $u_0 \in K$ mit $\gamma_+(u_0) \subseteq K$ und u die Lösung von (4.1) und (4.2). Setze $E_K = \{x \in K \mid f(x) = 0\}$. Dann gelten

$$\bar{t}(u_0) = +\infty \quad \text{und} \quad \text{dist}(u(t), E_K) \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow +\infty.$$

Wenn zusätzlich E_K diskret ist, dann konvergiert $u(t)$ für $t \rightarrow +\infty$ gegen einen Fixpunkt $u_* \in E_K$.

BEWEIS. 1) Sei u die Lösung von (4.1) und (4.2). Nach Voraussetzung liegt $u(t)$ für alle $t \in [0, \bar{t}(u_0))$ in K . Auf dem Kompaktum K besitzt V das Minimum m . Theorem 4.9 liefert dann $\bar{t}(u_0) = +\infty$. Weiter fällt die Funktion $\psi = V \circ u : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) =: \omega \geq m$ existiert.

Wir nehmen an, $\text{dist}(u(t), E_K)$ würde nicht für $t \rightarrow +\infty$ gegen E_K streben. Es gäbe also solche Zeiten $t_n \rightarrow +\infty$ und einen Abstand $\delta > 0$, dass für alle $u_* \in E_K$ die Ungleichung $|u(t_n) - u_*|_2 \geq \delta$ gälte. Da K kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge $(u(t_{n_j}))_j$ gegen einen Vektor $y \in K$. Aus der Stetigkeit von V folgt dann der Grenzwert $V(y) = \lim_{j \rightarrow \infty} V(u(t_{n_j})) = \omega$. Wir bezeichnen mit φ den lokalen Fluss zu (4.1). Für alle $t \geq 0$ liefert nun Satz 4.15 die Gleichung

$$\begin{aligned} V(\varphi(t, y)) &= \lim_{j \rightarrow \infty} V(\varphi(t, \varphi(t_{n_j}, u_0))) = \lim_{j \rightarrow \infty} V(\varphi(t + t_{n_j}, u_0)) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \psi(t + t_{n_j}) = \omega = V(y). \end{aligned}$$

Da V strikt ist, muss y ein Fixpunkt sein und damit in E_K liegen. Weil y ein Häufungspunkt des Orbits ist, kann die Widerspruchsannahme nicht gelten.

2) Sei nun E_K diskret. Wie in Schritt 1) gibt es eine Folge $t_k \rightarrow +\infty$ und einen Fixpunkt $u_* \in E_K$ mit $u(t_k) \rightarrow u_*$ für $k \rightarrow \infty$. Wir nehmen an, es gäbe eine Folge $s_j \rightarrow +\infty$ und einen Abstand $\rho > 0$ mit $|u(s_j) - u_*|_2 \geq \rho$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung existiert ein Radius $\rho' \in (0, \rho)$ mit $\partial B(u_*, \rho') \cap E_K = \emptyset$. Weiter gibt es so einen Index $k_0 \in \mathbb{N}$ und Zeitpunkte $s_{j_k} > t_k$, dass $|u(t_k) - u_*|_2 \leq \rho'/2$ und $|u(s_{j_k}) - u_*|_2 \geq \rho$ für alle $k \geq k_0$ gelten. Da u stetig ist, finden wir nun Zwischenpunkte $r_k \in (t_k, s_{j_k})$ mit $|u(r_k) - u_*|_2 = \rho'$. Damit hat die Folge $(u(r_k))_k$ (mindestens) einen Häufungspunkt v auf $\partial B(u_*, \rho')$. Dieser liegt wie in Schritt 1) aber in E_K , was unmöglich ist. $\square$

Das obige Resultat zusammen mit Theorem 6.14 und Satz 6.12 implizieren Aussagen, die von großem Nutzen in Anwendungen sind.

KOROLLAR 6.16. *Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ lokal Lipschitz und $V \in C(D, \mathbb{R})$ eine strikte Lyapunovfunktion. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) *Seien $f^{-1}(\{0\})$ diskret und $u_* \in D$ eine strikte lokale Minimalstelle von V . Dann gilt $f(u_*) = 0$ und u_* ist asymptotisch stabil.*

b) *In den folgenden Fällen i)–iii) liefert Theorem 6.15 die Konvergenz gegen E_K für alle Lösungen von (4.1), die in K (gegebenfalls $K := K_\alpha$) starten.*

i) *Für ein $u_0 \in D$ sei $K := \overline{\gamma_+(u_0)} \subseteq D$ beschränkt.*

ii) *Für ein $\alpha \in V(D)$ sei die Menge $K = K_\alpha := \{x \in D \mid V(x) \leq \alpha\}$ in $\mathbb{R}^m$ abgeschlossen und beschränkt.*

iii) *Es gelte $V(x) \rightarrow +\infty$ für $|x|_2 \rightarrow +\infty$ oder $\text{dist}(x, \partial D) \rightarrow 0$. Dann gilt ii) für jedes $\alpha \in V(D)$ und die Vereinigung der Mengen K_α ist gleich D .*

BEWEIS. In Teil a) ist u_* nach Theorem 6.14 ein stabiler Fixpunkt. Wähle $\varepsilon_0 > 0$ mit $K := \overline{B}(u_*, \varepsilon_0) \subseteq D$ derart, dass u_* das einzige Equilibrium auf K ist. Gemäß der Stabilität gibt es so einen Radius $r \in (0, \varepsilon_0]$, dass für alle $u_0 \in \overline{B}(u_*, r) \subseteq D$ die Lösung $u(t)$ für alle $t \geq 0$ in K bleibt. Theorem 6.15 liefert nun die Konvergenz von u gegen u_* . Behauptung b) folgt direkt aus diesem Theorem und Satz 6.11. $\square$

Wir zeigen nun, wie die obigen Aussagen (auf typische Weise) in unseren Standardbeispielen globale Attraktivitätsaussagen liefern.

BEISPIEL 6.17. a) Im Räuber-Beute Modell aus Beispiel 6.13 c) haben wir eine strikte Lyapunovfunktion auf $D = \mathbb{R}_+^2$ gefunden, die den Bedingungen von Korollar 6.16 genügt, vergleiche Beispiel 5.8. Außerdem gibt es in D nur das Koexistenzequilibrium (u_*, v_*) . Nach Theorem 6.15 strebt also für jedes $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}_+^2$ die Lösung $(u(t), v(t))$ gegen (u_*, v_*) für $t \rightarrow +\infty$, und (u_*, v_*) ist stabil.

b) Das gedämpfte Pendel aus Beispiel 6.13 b) besitzt eine strikte Lyapunovfunktion V und genau den Fixpunkt $(0, 0)$ in $D := (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$. Für $(u_0, v_0) \in D$ sei $\alpha := V(u_0, v_0) = \frac{1}{2}v_0^2 + \frac{\gamma}{\ell}(1 - \cos u_0) < \frac{2\gamma}{\ell}$. Gemäß Beispiel 5.7 ist $\{(x, y) \in D \mid V(x, y) \leq \alpha\}$ kompakt und $V > V(0, 0)$ auf $D \setminus \{(0, 0)\}$. Theorem 6.15 zeigt die Stabilität von $(0, 0)$ und die Konvergenz $(u(t), v(t)) \rightarrow (0, 0)$ der Lösung. $\diamond$

Literaturverzeichnis

- [1] H. Amann, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 2te überarbeitete Auflage. Walter de Gruyter, 1995.
- [2] B. Aulbach, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Spektrum Akademischer Verlag, 1997.
- [3] G. Fischer, *Lineare Algebra*. 16te, überarbeitete und korrigierte Auflage. Vieweg + Teubner, 2008.
- [4] W. Fischer und I. Lieb, *Funktionentheorie*. 9te, korrigierte Auflage, korrigierter Nachdruck. Vieweg + Teubner, 2008.
- [5] J.W. Prüss und M. Wilke, *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme*. Birkhäuser, 2010.
- [6] J.W. Prüss, R. Schnaubelt und R. Zacher, *Mathematische Modelle in der Biologie*. Birkhäuser, 2008.
- [7] R. Remmert und G. Schuhmacher, *Funktionentheorie I*. 5te, neu bearbeitete Auflage. Springer, 2002.
- [8] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen: Eine Einführung*. 7te, neu bearbeitete und erweiterte Auflage, Springer, 2000.
- [9] D. Werner, *Einführung in die höhere Analysis*. Springer-Verlag, 2006.
- [10] J. Zabczyk, *Mathematical Control Theory. An Introduction*. Reprint of the 1995 Edition. Birkhäuser, 2008.